PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 21. 1. November 1915. 16. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 22 am 13. November 1915.

INHALT:

Originalmitteilungen:
J. K. A. Wertheim-Salomonson, Photographische Härtemessung von Röntgenstrahlen. S. 389.
B. Winawer, Über günstige Entladungsform der Röntgenapparate. S. 391.
C. W. Oseen, Das Bohrsche Atommodell und die Maxwellschen Gleichungen. S. 395.
J. Elster u. H. Geitel, Verbesserungen am Kadmiumphotometer für ultraviolettes Licht. S. 405.
Besprechungen:
Les idées modernes sur la constitution de la matière. S. 408.
Personalien. S. 408.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Photographische Härtemessung von Röntgenstrahlen.

Von J. K. A. Wertheim-Salomonson.

In Nr. 16 dieser Zeitschrift (**16**, 306, 1915) wird von Herrn F. Voltz die photographische Härtemessung von Röntgenstrahlen erörtert und auf Grund seiner Versuche kommt er zu dem Schluß, daß dieselbe ungenau und unzuverlässig sei. Es scheint mir jedoch, daß dieser Schluß nicht genügend begründet ist, und zwar darum, weil die gestellte Prämisse nicht ganz einwandfrei ist.

Herr Voltz mißt die Klemmenspannung an der Röntgenröhre mit einem elektrostatischen Voltmesser von Hartmann & Braun, und zwar nicht in absolutem Maße, sondern in willkürlichen Einheiten — denn er schaltet vor dem Voltmesser einen Kondensator. Ich habe bei früheren Versuchen dasselbe Verfahren angewendet und habe dabei die Schwierigkeit gehabt, daß bisweilen die Kondensatoren sowie die sekundäre Spule des Induktors eine nicht unbeträchtliche statische Ladung erhielten, wodurch die Ausschläge des elektrostatischen Voltmeters zu hoch gerieten. Die Abhilfe war leicht zu schaffen, indem die beiden Klemmen des Induktors durch einen großen Schieferwiderstand, dessen Mitte geerdet wurde, verbunden wurden. Bei den 4 ersten Versuchen in Tabelle II aus der oben angeführten Arbeit bleibt die elektrostatische Spannung dieselbe, während die photographisch gemessene Härte herabsinkt. Das ist geradezu charakteristisch für das Auftreten einer statischen Ladung des Kondensators. Auch in den Versuchsreihen 6 bis 9 ist etwas Derartiges zu sehen.

Es ist sehr wohl möglich, daß dieser Fehler nicht bestanden hat — aber dies kann nur behauptet werden, wenn tatsächlich darauf geachtet wurde.

Ich habe jedoch noch verschiedene andere Bedenken gegen die Versuchsanordnung des Herrn Voltz. Es wurde nämlich ein elektrostatisches Voltmeter mit einem Meßbereich bis 5000 Volt benutzt. Bei diesen Instrumenten liegt 3000 Volt in der Mitte der Teilung, und an dieser Stelle sind die Teilstriche sogar weiter auseinander als an irgendwelcher anderen Stelle der Skala. Hier ist eine sehr genaue Ablesung möglich. Aber nach 2000 Volt zu rücken die Striche bedenklich zusammen. Zwischen 1500 und 2000 ist die Skala nicht geteilt, und in dem etwa 1 cm langen Zwischenraum ist die Ablesung auf 100 Volt ziemlich willkürlich. Und das Mittel aus mehreren schlechten Ablesungen kann, aber braucht nicht besser zu sein als jede einzelne Ablesung für sich.

Wenn also hintereinander zweimal 3000 Volt abgelesen wird, so dürfte allerdings die Genauigkeit der Ablesung etwa 1 Proz. erreichen. Bei der Angabe von 1800 Volt erreicht diese gewiß nicht 7 bis 8 Proz. — Da bei den gebräuchlichen Milliamperemetern für Röntgenzwecke, die meistens 5 Milliampere umfassen, in der Nähe von 2 Milliampere eine Genauigkeit von etwa 5 Proz. zu erreichen ist, dürfte die Genauigkeit einer einzelnen Versuchsreihe auf nicht viel mehr als 10 Proz. anzuschlagen sein. Ein Unterschied von 10 Proz. entspricht jedoch schon fast einer halben Nummer der Wehnelt-Skala.

Selbst für den Fall, daß die Voltzschen Versuche eine viel größere Genauigkeit aufweisen, als ich vermutete, daß erreicht wurde, glaube ich doch, daß dieselben nichts beweisen. Und hierfür bestehen zwei Gründe, die ich nacheinander betrachten werde.

I. In den Voltzschen Versuchsreihen wird ein elektrostatisches Voltmeter gebraucht, um die mittlere Klemmenspannung an der Röhre zu messen. Hierbei wird bekanntlich vorausgesetzt, daß die Kathodenstrahlengeschwindigkeit der Quadratwurzel der Spannung propor-

tional ist. Da die Strahlenhärte abhängig ist von der Kathodenstrahlgeschwindigkeit, haben wir tatsächlich das beste Maß für die Strahlenhärte in der Klemmenspannung, durch welche die Elektronen fortgeschleudert werden. Wird also die Röhre mit einem konstanten Gleichstrom betrieben, z. B. von einer Hochspannungsbatterie oder durch die Kröncke sche Anordnung, dann ist die elektrostatische Messungsmethode, wenn auch nicht ganz einwandfrei, jedenfalls die beste, die es gibt. Ein möglicher Einwand besteht darin, daß sogar eine mit konstantem Gleichstrom betriebene Röhre neben einer völlig homogenen Hauptstrahlung auch noch einige charakteristische Strahlungen abgibt von der Antikathode, sowie eine sekundäre Strahlung von der Glaswand. Das Resultat ist ein Strahlengemisch, bei dem die Hauptstrahlung zwar überwiegt, aber welches dennoch abhängig ist von der Zusammenstellung der Antikathoden-Oberfläche und von der Glaswand.

Sobald aber pulsierende Ströme zum Betrieb verwendet werden, ändert sich die Sache. Dann hängt es ab von dem Spannungsmesser, ob wir ein richtiges Bild der mittleren Härte bekommen. Die meisten elektrostatischen Instrumente geben einen quadratischen Mittelwert, so auch die von Hartmann & Braun angefertigten elektrostatischen Voltmeter. Bei dem photographischen Härtemesser wird wahrscheinlich ein arithmetischer Mittelwert registriert, obgleich dies nicht absolut festgestellt worden ist. Jedenfalls sind mir keine Tatsachen bekannt, die auf ein anderes Verhalten hinweisen. Ich muß also annehmen, daß eine vergleichende Härtemessung mit einem elektrostatischen Voltmeter (in der gebräuchlichen „quadratischen" Schaltung!) und mit einer Benoist- oder Wehnelt-Skala dieselbe Bedeutung hat als die vergleichende Messung eines pulsierenden Gleichstromes mit einem Hitzdraht- und einem Weston-Instrumente. Hier ist nie Übereinstimmung zu erwarten und jede Änderung der Kurvenform des Gleichstromes hat eine ungleiche Wirkung auf die beiden Instrumente. Dasselbe ist zu erwarten bei dem elektrostatischen Voltmeter und dem photographischen Härtemesser.

II. Ein Grund von vielleicht noch größerer Bedeutung für die Unzulänglichkeit und Unzuverlässigkeit des elektrostatischen Voltmeters als Härtemesser bei Induktorbetrieb der Röhre liegt in der Eigenart der sekundären Entladungen des Induktors. Ich besitze eine größere Reihe Oszillogramme von sekundären Entladungen durch Widerstände von 0,1 bis 20 Meßohm, durch Röhren der verschiedensten Härte — von den weichesten bis zu den härtesten Therapieröhren mit einer parallelen Funkenstrecke bis 40 cm. — Dieselben wurden aufgenommen mit einem Hochfrequenz-Oszillographen von Siemens & Halske und werden hoffentlich später veröffentlicht werden. Mit diesen Oszillogrammen läßt sich zeigen, daß am Ende der Entladungen eine ganze Reihe starker Oszillationen auftreten. Diese entsprechen jedoch keinem Stromdurchgang, sondern stellen oszillierende Ladungserscheinungen der beiden in die Röhre führenden Elektroden dar. Diese Oszillationen treten um so deutlicher hervor, je härter die Röhre ist. Dieselben üben einen erheblichen Einfluß auf das elektrostatische Voltmeter, dessen Angaben sie in unberechenbarer und unvorhersehbarer Weise erhöhen, aus. In zwei unmittelbar nacheinander, unter möglichst gleichen Bedingungen aufgenommenen Oszillogrammen können sie erheblich differieren. Besonders bei härteren Röhren ist ihre Bedeutung so groß, daß die absolute Größe der mittleren Spannung während des Stromdurchganges in keinem konstanten Verhältnisse steht zu der abzulesenden Spannung. Und diese Beschwerden kommen nicht nur beim Induktorbetrieb, sondern auch beim Betrieb mit dem Hochspannungsgleichrichter vor. Wer sich von dieser Tatsache überzeugen will, braucht nur einen Blick zu werfen in die Arbeit von Herrn A. Wehnelt, welche in dem Heft 16 der Annalen der Physik, Bd. 47, 1915, S. 1112 veröffentlicht wurde. Hier werden Spannungskurven von Röntgenröhren veröffentlicht, welche mit der größten Deutlichkeit zeigen, daß die Spannung vor und nach der eigentlichen Entladung außerordentlich hoch ist — viel höher als die Arbeitsspannung während des Stromdurchgangs. Das statische Voltmeter mißt aber auch diese Durchbruchspannung sowie die Spannung nach der Entladung mit. Da diese Anfangs- und Endspannungen erheblich in ihrem absoluten Betrage wechseln, so scheint mir das elektrostatische Voltmeter nicht geeignet, ein zuverlässiges Maß zu gewähren für die Röntgenröhrenhärte.

Ich glaube also, daß aus der Arbeit des Herrn Voltz hervorgeht, daß es wahrscheinlich ist, daß die Angaben des elektrostatischen Voltmeters nicht immer gleichen Schritt halten mit den photographischen Messungsergebnissen.

Es bleibt aber dann noch immer die offene Frage nach der Zuverlässigkeit der photographischen Methode. Persönlich bin ich geneigt dieselbe sehr hoch anzuschlagen, und betrachte sie als die beste bis jetzt bekannte Methode. Sogar die verschiedenen auf Ionisierung fußende Meßmethoden sind mit so viel Fehlerquellen behaftet, daß sie nur den Händen eines vorsichtigen und kritischen Physikers anvertraut werden sollten.

Schließlich möchte ich bemerken, daß ich selber auch Versuche angestellt habe, um zu untersuchen, ob der Gebrauch verschiedener Plattensorten irgendwelchen Einfluß haben könnte auf den abzulesenden Härtegrad. Ich gebrauchte dazu einen Keil aus reinem Aluminium gearbeitet, neben welchem an jeder Seite eine von zwei genau gleich dicken Silberplatten angeordnet waren. Es wurden jetzt eine frisch durchgeschnittene Agfa-Röntgenplatte und eine eben solche Imperial Rapid-Platte unmittelbar nebeneinander unter den Keil gelegt, in der Weise, daß sich über jeder Platte die ganze Keillänge in der halben Keilbreite sowie je eine Silberplatte befanden. Jetzt wurde exponiert und beide Platten entweder separat oder zusammen entwickelt. Dieselben ergaben immer bis auf 0,1° Benoist übereinstimmende Nummern. Ich möchte noch bemerken, daß der Keil auf 10 cm Länge 10 mm in Dicke zunahm, wodurch jedes Millimeter in der Länge 0,1° Benoist entspricht. Bei Härtegraden über 5° Benoist ist eine Ablesung nur auf 0,2° Benoist möglich.

Bei einer anderen Versuchsreihe wurden Lanternplatten mit Agfa-Röntgenplatten verglichen, wobei 2 Chabaudsche Benoist-Härteskalen verwendet wurden und die Lanternplatten in etwa $^2/_3$ der Distanz der Agfa-Röntgenplatten exponiert wurden. Jeder Versuch wurde wiederholt mit Verwechslung der Härteskalen und Umdrehung der Röhre. Hierdurch wurde Ungleichmäßigkeit der Röhrenwand und Ungleichheit der beiden Skalen eliminiert. Ungleichheit der Skalen war jedoch nicht zu finden. Die bei diesen Versuchen abgelesenen Zahlen stimmten vollständig überein.

Ich habe keine Veranlassung gefunden auch den Entwickler zu ändern, weil in meinem Institut ausschließlich mit dem sehr gleichmäßig arbeitenden Hydrochinonentwickler gearbeitet wird.

Zusammenfassung.

1. Die Härtemessung mit direkt zeigenden elektrostatischen Voltmetern ist nur angängig, wenn bleibende statische Ladungen vermieden werden, und wenn mit nicht unterbrochenem Gleichstrom mit nur mäßigen Schwankungen durch die Röhre gearbeitet wird.

2. Für praktische Zwecke ist die photographische Härtemessung, die sich durch einfache und bequeme Technik auszeichnet, vollständig genügend. Zurzeit muß sie als die zuverlässigste Methode der Härtemessung betrachtet werden.

Amsterdam, Röntgeninstitut der Universität. 18. September 1915.

(Eingegangen 21. September 1915.)

Über günstige Entladungsform der Röntgenapparate.

(Aus dem Laboratorium der Veifa-Werke: Direktor Friedrich Dessauer, Frankfurt a. M. Mitteilung Nr. 3.)[1])

Von B. Winawer.

1. Zum Betriebe der Röntgenröhren werden in der Technik fast alle bekannten Hochspannungsquellen benutzt. Der Funkeninduktor, mit Gleichstrom und Unterbrecher betrieben, wird am häufigsten angewandt und bildet das sogenannte klassische System. Aber auch Wechselstromtransformatoren mit geschlossenem und offenem Eisenkern finden oft Verwendung. Bei diesen wird der sekundäre Wechselstrom mit Hilfe besonderer Vorrichtungen gleichgerichtet. Den verschiedenen Apparaten und Systemen werden nicht nur praktische Vorteile nachgerühmt, sondern meistens auch ein günstiger Einfluß auf das Strahlengemisch, Qualität und besonders Quantität der Strahlen.

Es drängt sich die Frage auf, inwieweit die Röntgenstrahlung von der Art der Stromquelle abhängig ist und wie die für den Betrieb günstigste Hochspannungsquelle beschaffen werden müßte. Die Frage läßt sich unter gewissen Voraussetzungen beantworten, und die vorliegende Mitteilung soll zeigen, daß man auf Grund der Arbeiten von Carter, Seitz, Whiddington u. a.[2]) Bedingungen aufstellen kann, denen die Stromkurve eines Apparates genügen muß, um möglichst große Ausbeute an Röntgenstrahlen zu liefern. Es erweist sich, daß die Stromquelle für den Dauerbetrieb der Röhre dann am günstigsten ist, wenn sie eine möglichst schmale Stromkurve besitzt, d. h. wenn sie sich in kurzdauernden Stromstößen durch die Röhre entlädt. Diese Bedingung ist den Konstrukteuren wohlbekannt, findet sich in vielen technischen Arbeiten vor[3]), ist aber, wie es scheint, nie genügend begründet gewesen. Sie kann auch, wie im folgenden gezeigt werden soll, durch eine präziser gefaßte ersetzt werden.

Der folgende § 2 enthält die Ableitung der günstigsten Entladungsform, § 3 die Versuche, welche zur Prüfung der theoretischen Betrachtung angestellt waren. Es sei hervorgehoben, daß die Betrachtungen des § 2 sich auf gewöhnliche, auf selbständiger Entladung beruhende, Röhren beziehen. Es wird auch vorausgesetzt, daß die

---

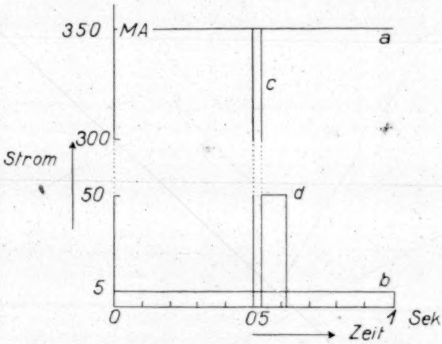
1) Nr. 2: diese Zeitschr. **16**, 258, 1915.

2) Carter, Ann. d. Phys. **21**, 955, 1906; Seitz, diese Zeitschr. **7**, 689, 1906.

3) S. z. B. Boas, Dessauer, Koch, Archiv f. phys. Medizin Bd. II. III, 1907 u. 1908; Rosenthal, Verhandl. der D. Röntgen Ges. **4**, 67, 1908.

Röhre „mittelhart" ist, längere Zeit betrieben werden soll und dabei möglichst große Ausbeute an X-Strahlen liefern muß — Bedingungen, welche in der Praxis etwa bei Röntgentherapie erfüllt werden müssen.

2. In der dritten Mitteilung Röntgens über die Eigenschaften der X-Strahlen wird bereits auf die wichtige Rolle der Entladungsform bei der Erzeugung der Röntgenstrahlen hingewiesen (S. 34ff. der „Grundlegenden Abh." Würzburg 1915, zuerst Berl. Ber. 1897).[1] Auf Grund der Versuche von Carter kann der Einfluß der Stromkurve näher erläutert werden. Die Cartersche Arbeit enthält die wichtige Feststellung, daß der Nutzeffekt bei Erzeugung der Röntgenstrahlen (das Verhältnis der Röntgenstrahlenenergie E_R zu der Kathodenstrahlenenergie E_K) proportional der Entladungsspannung wächst. Es wird in dieser Arbeit die Röntgenröhre als eine Maschine betrachtet und der Wirkungsgrad dieser Maschine wächst, wie die Versuche zeigen, mit der Entladungsspannung. Es würde daraus folgen, daß die für den Betrieb einer Röhre günstigste Stromquelle diejenige wäre, welche die größten Elektrizitätsmengen bei möglichst hoher Spannung ständig liefern könnte. Würde man aber mit einer solchen Idealstromquelle eine Röntgenröhre betreiben, so würde man, da der Strom hier sehr rasch mit der Spannung wächst[2], auch ganz beträchtliche Ströme durch die Röhre schicken müssen. So hat z. B. Déguisne[3]) in einer mittelharten Röhre Ströme bis zu 350 Milliampère gemessen. Einen derartigen Strom würde keine der gebräuchlichen Röhren auf die Dauer aushalten können. Erfahrungsgemäß kann eine besonders gut gekühlte Röhre bei Dauerbetrieb eine Belastung von 5—6 Milliampère vertragen, ohne sich stark zu verändern. Will man diese zulässige mittlere Belastung einhalten, ohne gleichzeitig die Entladungsspannung zu erniedrigen, so bleibt nur ein Weg offen. Man muß die erwähnte ideale Hochspannungsquelle auf kurze Momente anschließen, mit anderen Worten eine Anzahl kurzdauernder starker Stromstöße durch die Röhre leiten. Bezeichnet man den maximalen, in der Röhre erzeugbaren Strom mit I_{max}, den bei längerem Betrieb der Röhre zulässigen mit i_z, so läßt sich leicht zeigen, daß die ideale Hochspannungsquelle innerhalb jeder Sekunde nur auf die kurze Dauer $\left(\frac{i_z}{I_{max}}\right)$ Sek. angeschlossen werden dürfte. Die nachstehende schematische Zeichnung (Figur) wird das näher erläutern. In der Figur stellt a diejenige



Stromkurve dar, die sich mit einer ständig auf hoher Spannung gehaltenen Stromquelle hoher Kapazität ergeben würde. b ist die zulässige Stromkurve. Als I_{max} sind 350, als i_z 5 Milliampère angenommen. Ist die Basis des Rechtecks c im Verhältnis $\frac{350}{5}$ mal kleiner als die Basis von b, so ergibt c dieselbe mittlere (elektrolytisch gemessene) Belastung wie die Kurve b, es fließt in beiden Fällen dieselbe Elektrizitätsmenge sekundlich durch die Röhre, im Falle c aber vollzieht sich die Entladung bei höchster Spannung, während sie bei b bei niedriger Spannung stattfindet. Die Kurve c ist die günstigste, b die ungünstigste für den Betrieb einer Röntgenröhre. Das Rechteck c kann man sich weiter in äquidistant verteilte engere Streifen zerlegt denken. Wenn ihre Gesamtbreite derjenigen des Rechtecks c gleich ist, bleibt die Stromkurve theoretisch der Kurve c gleichwertig. Nur das Verhältnis der Stromdauer zu dem Intervall zwischen zwei Entladungen ist maßgebend. Dieses Verhältnis wird auch im folgenden als die Strombreite bezeichnet. Man kann die einfachen Betrachtungen noch mehr ausdehnen und die Breite der günstigsten Kurve berechnen. Sie ist gleich $\frac{i_z}{I_{max}}$; nach den über den maximalen und zulässigen Strom gemachten Annahmen würde sie etwa $^1/_{70}$ betragen $\left(\frac{5}{350}\right)$. Der Wert des optimalen Ver-

1) „Wenn man die für das Zustandekommen der X-Strahlen nötige Entladungsform in irgendeiner Weise herzustellen vermag, so können auch X-Strahlen erhalten werden, selbst bei relativ hohen Drucken."

2) Das ist nur bei Selbstentladung der Fall. Auf die neuen Glühionenröhren (Lilienfeld, Coolidge), bei welchen die Spannung und die Stromstärke unabhängig voneinander variiert werden können, haben die Erörterungen keine Anwendung.

3) Diese Zeitschr. **15**, 630, 1914.

hältnisses $\frac{\text{Stromdauer}}{\text{Intervall}}$ ändert sich, wenn man für den maximalen Strom einen anderen Wert einsetzt, oder wenn man annimmt, daß das Cartersche Gesetz bei sehr hohen Spannungen nicht mehr in seiner einfachen Form gilt. Bei einer mittelharten Röhre ist das erwähnte Verhältnis (und somit die günstigste Strombreite) jedenfalls klein. Daraus folgt, daß auch die Dauer des einzelnen Stromstoßes kurz sein muß, unter den gemachten Annahmen und bei 20 Entladungen pro Sekunde etwa $\frac{1}{1400}$ Sek. Im allgemeinen ist bei m Entladungen pro Sek. die günstigste Dauer des Stromstoßes

$$\Delta t_{\text{opt.}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{i_z}{I_{\max}}.$$

Es ergibt sich aus diesen Betrachtungen die Forderung 1: Die günstigste Stromquelle ist diejenige, bei welcher eine bestimmte zulässige Belastung in einer kleinen Anzahl möglichst kurzdauernder Stromstöße erreicht wird, oder diejenige, bei welcher eine bestimmte Belastung mittels einer möglichst **schmalen** Stromkurve erreicht wird.

Dieser Satz kann auch in eine andere, für experimentelle Prüfung besser geeignete Form gebracht werden. Die Kurve b (die ungünstigste) ist die Kurve des Gleichstromes: hier ist der arithmetisch (elektrolytisch) gemessene Mittelwert dem effektiven Wert des Stromes gleich. Bei Kurve c dagegen unterscheiden sich die beiden Werte des Stromes stark voneinander, wie sich das leicht zeigen läßt. Bezeichnen wir im Falle c die Stromdauer mit Δt, die Pause mit $n\Delta t$, die Amplitude des Stromes während der Zeit Δt mit i_c, so ist der elektrolytische Mittelwert des Stromes $i_m = i_c \cdot \frac{\Delta t}{(n+1)\Delta t}$ und der effektive $i_e = i_c \sqrt{\frac{1}{n+1}}$[1]). Das Verhältnis der beiden Werte ist $\frac{i_e}{i_m} = \sqrt{n+1}$. Da bei der günstigsten Stromkurve $n+1$ möglichst groß sein muß $\left(\frac{1}{n+1}\right.$ ist die Strombreite$\left.\right)$, so folgt daraus auch Forderung 1a: Von verschiedenen Strömen, welche denselben arithmetischen Mittelwert ergeben, ist derjenige am günstigsten, dessen effektiver Wert am größten ist.

1) Folgt aus der Beziehung $i_e^2 \cdot (n+1)\Delta t = i_c^2 \cdot \Delta t$.

Man kann die günstigste Stromquelle noch präziser kennzeichnen. Es ist nach Carter[1])

$$\frac{E_R}{E_K} = a \cdot V,$$

wobei V die Entladungsspannung, E_K die Energie der Kathodenstrahlen, E_R der erzeugten Röntgenstrahlen bedeutet. E_K ist dem Quadrat der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen proportional. Bezeichnet man diese Geschwindigkeit mit v, so ist für ein Elektron

$$V = \frac{1}{2}\frac{m}{e}v^2 \text{ und } E_K = eV = \frac{1}{2}mv^2$$

(e Ladung, m Masse des Elektrons).

Daraus folgt, daß $E_R = a_1 \cdot v^4$ (a_1 eine Konstante). Die Gleichung ist auch auf theoretischem Wege von J. J. Thomson abgeleitet worden.[2]) Ergeben zwei Stromquellen (z. B. diejenige, welche durch Kurve c charakterisiert ist, und diejenige, welcher Kurve b entspricht) dieselbe mittlere Belastung, so ist auch die Anzahl (N) der Elektronen, welche pro Sekunde auf die Antikathode der Röhre aufprallen, bei beiden Apparaten die gleiche. Die Erwärmung der Antikathode bei dem Apparat c ist

$$E_K = \frac{1}{2} N m v_c^2.$$

Die Energie der Röntgenstrahlen ist

$$E_R = a\, v_c^4.$$

Bei dem Apparat b muß in den Formeln v_c durch v_b ersetzt werden, und soll der Apparat c bei derselben Belastung günstiger wirken, so muß die Entladung bei höherer Spannung stattfinden, dementsprechend v_c größer als v_b sein. Es ergibt sich, daß bei dem Apparat c die Erwärmung E_K größer ist, daß aber auch die Energie der Röntgenstrahlen größer ist, und zwar im Verhältnis der Quadrate der Erwärmungen. Es ergibt sich somit die Forderung 2: Von zwei verschiedenen Stromquellen ist diejenige für den Betrieb der Röhren als günstiger zu bezeichnen, welche bei derselben Belastung die größere Erwärmung der Antikathode verursacht.

Ist bei zwei verschiedenen Apparaten bei derselben Belastung das Verhältnis der Erwärmungen oder Energien E_K festgestellt, so kann auch das Verhältnis der Röntgenstrahlenenergien berechnet werden. Es ist gleich dem Quadrate des Verhältnisses der Kathodenstrahlenenergien:

1) Vgl. Pohl, Physik der Röntgenstrahlen, S ff., 1912.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. **14**, 216, 1907; R. Whiddington, Proc. Roy. Soc., A, **85**, 323, 1911. In einer neuerdings publizierten Arbeit von Rutherford und Barnes (Phil. Mag. **30**, 361, 1915) wird die Beziehung bei Spannungen bis zu 96000 Volt geprüft und bestätigt gefunden.

$$\frac{E_{R_1}}{E_{R_2}} = \left|\frac{E_{K_1}}{E_{K_2}}\right|^2.$$

Um die hier abgeleiteten Sätze zu prüfen, sind Versuche unternommen worden, und zwar in folgender Weise: Eine mittelharte Röhre, die sich besonders gut für kalorimetrische Messungen eignete (es war eine sogenannte Müller-Röhre, deren Wasserbehälter aus Silber bestand), wurde mit drei verschiedenen Apparaten betrieben. Apparat A war ein mit Gleichrichter versehener Wechselstromtransformator. Als Apparat B wird derselbe Transformator bezeichnet, bei dem nur durch eine besondere Schaltungsanordnung statt 25 50 Impulse durch die Röhre hindurchgeleitet wurden und die Strombreite etwa 2,5 mal größer gemacht werden konnte. Als Apparat C wird schließlich ein von beiden abweichend konstruierter Apparat bezeichnet. Man verfügte bei diesen drei Apparaten über verschiedene Entladungskurven, deren Breiten sich ungefähr wie 1 : 7 : 16 verhielten. Die Versuche wurden in der Weise geführt, daß zuerst das Verhältnis der von zwei Apparaten erzeugten Röntgenstrahlenenergien elektroskopisch festgestellt (und zwar bei derselben Belastung der Röhre), dann das Verhältnis der Erwärmungen E_K und schließlich das Verhältnis der Stromkurvenbreiten (mit Hilfe der Glimmlichtröhre und des rotierenden Spiegels) geschätzt wurde. Als Stromzeiger diente ein Deprez-Instrument für Hochspannung. Kontrollversuche ergaben, daß es sich bei nicht zu hohen Schlagzahlen und Belastungen angenähert auf den Mittelwert des Stromes einstellte. Die Resultate der Versuche sind in § 3 zusammengestellt.

3. Versuch 1. Es werden die Apparate A und B verglichen. Belastung bei beiden Apparaten 1,7 Milliampère. Das Verhältnis der Stromkurvenbreiten ist: Breite A : Breite $B = 1 : 2{,}3$. Das Verhältnis der Röntgenstrahlenenergien wird elektroskopisch bestimmt. Es ergibt sich für die durch 2 mm Aluminium filtrierten Strahlen

$$\frac{E_R(A)}{E_R(B)} = 1{,}5,$$

für die unfiltrierten (durch das Glas der Röhre hinaustretenden) Strahlen

$$\frac{E_R'(A)}{E_R'(B)} = 1{,}4.$$

Man ersieht daraus, daß der Apparat A, welcher die Belastung 1,7 Milliampère mittels schmälerer Kurve ergibt, auch eine größere Ausbeute an Röntgenstrahlen liefert. Die Forderung 1 wird somit bestätigt.

Versuch 2. Der Apparat A wird mit dem Apparat C verglichen. Belastung 1,5 Milliampère. Verhältnis der Strombreiten

$$\frac{\text{Breite } i_C}{\text{Breite } i_A} = \text{ca. } \frac{1}{7}.$$

Verhältnis der Röntgenstrahlenenergien:

filtrierte Strahlen

$$\frac{E_R(C)}{E_R(A)} = 6{,}6,$$

unfiltrierte Strahlen

$$\frac{E_R'(C)}{E_R'(A)} = 5{,}5.$$

Auch hier wird die Forderung 1 bestätigt. Ist die Stromkurve bei derselben Belastung 7 mal breiter, so ist die Ausbeute an Röntgenstrahlen 6,6 bis 5,5 mal kleiner[1]).

Um die Forderung 1a zu prüfen, nach welcher bei der günstigsten Stromform der Effektivwert i_e im Verhältnis zum Mittelwert i_m möglichst groß sein muß, wurde der Sekundärstrom bei den Apparaten A, B und C gleichzeitig mit einem Dynamometer von Hartmann & Braun (Bereich 0—12 Milliampère) und mit dem Deprez-Instrument gemessen. Es erwies sich, in Übereinstimmung mit 1a, daß das Verhältnis $\frac{i_e}{i_m}$ bei dem Apparat C am größten (ca. 8,0), bei dem Apparat B am kleinsten (ca. 2,4) war.

Es sei hervorgehoben, daß nach der im § 2 abgeleiteten Formel das Verhältnis $\frac{i_e}{i_m} = \sqrt{n+1}$ ist, wobei $n+1$ die Strombreite (n — das Verhältnis der Stromdauer zur Strompause) bedeutet. Man kann also, eine einfache (Figur) Kurvenform vorausgesetzt, aus dem Verhältnis der Ausschläge eines Dynamometers und eines Deprez-Instrumentes die Strombreite und somit auch, wenn die Anzahl der Entladungen pro Sek. bekannt ist, die mittlere Dauer des Stromstoßes (des Aufleuchtens der Röhre) berechnen.

So wäre z. B. beim Apparat B:

die Strombreite $= 2{,}4^2 = 5{,}8$,

die Dauer des Aufleuchtens der Röhre, da der Apparat B 50 Impulse pro Sek. liefert:

$$= \frac{1}{50 \cdot 5{,}8} = \frac{1}{290} \text{ Sek.}^{2)}$$

Versuch 3. Es wird der Apparat A mit dem Apparat C verglichen. Belastung 1,6 Milliampère. Die Erwärmung der Antikathode (Ener-

---

1) Es sei hier eine interessante Arbeit von Wertheim-Salomonson (Fortschr. a. d. Geb. d. Röntgenstr. **16**, 291, 1910) zitiert, in welcher auch ein deutlicher Einfluß der Entladungsform konstatiert wird. S. a. dieselbe Zeitschr. Kreß **21**, 692, 1913; Wendt **21**, 687, 1913.

2) Ist $n+1$ bestimmt, so läßt sich auch die maximale Stromamplitude i_c berechnen:

$$i_c = (n+1)\, i_m, \text{ oder } = \left|\frac{i_e}{i_m}\right|^2 i_m.$$

gie E_K) wird gemessen, um die Forderung 2 zu prüfen. Verhältnis der Kurvenbreiten:

$$\frac{\text{Breite } i_C}{\text{Breite } i_A} = \text{ca. } {}^1/_6.$$

Verhältnis der Röntgenstrahlenenergien:

filtrierte Strahlen

$$\frac{E_R(C)}{E_R(A)} = 6{,}2,$$

unfiltrierte Strahlen

$$\frac{E_R'(C)}{E_R'(A)} = 4{,}2.$$

Verhältnis der Erwärmungen:

$$\frac{E_K(C)}{E_K(A)} = 1{,}9.$$

Die Forderung 2 wird bestätigt. Der günstigere Apparat ergibt, bei derselben Belastung, eine größere Erwärmung der Antikathode. Das Verhältnis der Energien E_K ist 1,9, das Quadrat dieser Zahl (3,6) sollte das Verhältnis der Röntgenstrahlenenergien ergeben.

Mit guter Übereinstimmung damit wird dieses Verhältnis elektroskopisch zu 4,2 bestimmt.

Die Versuche 1, 2 und 3 sind oft mit denselben, nur innerhalb der Fehlergrenzen schwankenden Resultaten wiederholt worden.

Versuch 4. Die Apparate A und C (s. Versuch 3) werden so eingestellt, daß bei beiden angenähert dieselbe Erwärmung E_K beobachtet wird.

$$E_K(A) = 7{,}6 \text{ kal/Sek.}$$
$$E_K(C) = 9{,}4 \quad „$$

Belastung bei (A) 2 Milliampère,
„ „ (C) 1,2 „

Verhältnis der Röntgenstrahlenenergien:

filtrierte Strahlen

$$\frac{E_R(C)}{E_R(A)} = 3{,}1,$$

unfiltrierte Strahlen

$$\frac{E_R'(C)}{E_R'(A)} = 2{,}1.$$

Auch hier ist, wie im Versuch 3, der Apparat C im Vergleich zu A etwa zweimal besser, wenn man unfiltrierte Strahlen berücksichtigt, und dreimal, wenn schwach filtrierte Strahlen gemessen werden.

Die Forderung 2 und die Versuche 3 und 4 ergeben eine einfache Methode zur Prüfung der Röntgenapparate. Zur Prüfung genügt eine passende Röhre, ein geeigneter, am besten elektrolytischer Stromzeiger[1]) und ein Thermometer.

Versuch 5. Der Induktor C wird mit einem anderen Induktor D unter ganz gleichen Bedingungen verglichen (derselbe Unterbrecher, dieselbe Schlagzahl, Röhre usw.). Die sekundäre Belastung bei beiden Apparaten 1,6 Milliampère. Die Forderungen 1, 1a und 2 werden bestätigt gefunden. Beim Induktor D ist das Verhältnis $\frac{i_e}{i_m}$ kleiner (die Strombreite größer), die Erwärmung der Antikathode geringer (1,4 mal), die Ausbeute an unfiltrierten Röntgenstrahlen 2,5 mal kleiner.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Mitteilung wird der Versuch gemacht, die für den Dauerbetrieb der Röntgenröhren günstigste Entladungsform einer Stromquelle näher zu kennzeichnen. Es werden zwei Forderungen abgeleitet, welchen die Stromquelle genügen muß. Diese Forderungen werden experimentell geprüft und bestätigt.

1) Bei Deprez-Instrumenten muß kontrolliert werden, ob sie den Mittelwert und nicht (wie es bei großen Frequenzen und Strombreiten vorkommt) den Scheitelwert des Stromes anzeigen. Die verkehrten (Schließungs-)Impulse müssen vermieden werden.

(Eingegangen 9. Oktober 1915.)

Das Bohrsche Atommodell und die Maxwellschen Gleichungen.

Von C. W. Oseen.

1. Daß die Maxwellschen Gleichungen im Innern eines Atoms keine Gültigkeit haben, darüber scheint man nun allgemein einig zu sein. Dagegen scheint man ihre Gültigkeit außerhalb des Atoms immer noch anerkennen zu wollen. Daß der Spielraum für die Hypothesenbildung dabei weit beschränkter ist, als man im ersten Moment glauben sollte, habe ich früher nachgewiesen. Ich konnte nämlich beweisen, daß die Annahme, ein Resonator könne Energie absorbieren ohne zugleich Energie zu emittieren, gleichbedeutend ist mit der Annahme, die Maxwellschen Gleichungen seien im ganzen Raum ungültig — die Wörter Absorption und Emission hier in der gewöhnlichen Bedeutung genommen und die Emission nach dem Poyntingschen Satze berechnet. In diesem Aufsatz untersuche ich in analoger Weise, ob das Bohrsche Atommodell mit der Annahme vereinbar ist, daß die Maxwellschen Gleichungen außerhalb eines Atoms gültig seien.

Ich leite zunächst Formeln ab, die es möglich machen die Werte für $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ in einem beliebigen Punkte außerhalb einer geschlossenen Fläche zu berechnen, wenn man annimmt, daß außerhalb dieser Fläche die Maxwellschen Glei-

chungen für das Vakuum gelten und wenn die Werte für $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ auf dieser Fläche bekannt sind. Die Anwendung dieser Formeln auf das Bohrsche Atommodell führt zu folgendem Resultat: die Annahmen, die Bohr seiner Theorie zugrunde legt, sind unvereinbar mit der Hypothese, daß die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum außerhalb einer Kugel, die ein Wasserstoffmolekül umgibt, und einen Radius von der Größenordnung 10^{-4} cm hat, gültig sind. Ich führe Gründe an, die es meiner Meinung nach notwendig machen die Maxwellschen Gleichungen unter diesen Umständen auch für den leeren Raum aufzugeben, wenn man das Bohrsche Atommodell akzeptieren will.

Ich unterwerfe ferner die Debye-Sommerfeldsche[1]) Theorie für die Dispersion des Lichtes einer Kritik. Ich weise nach, daß für diese Theorie die Hauptaufgabe noch zu lösen ist, nämlich zu beweisen, daß die Fortpflanzung des Lichtes in einem Gase von einer Differentialgleichung des bekannten Typus beherrscht wird, und daß die Verhältnisse an den Oberflächen den bekannten, von der Erfahrung bestätigten Gesetzen gehorchen.

Die Absicht dieses Aufsatzes ist, wie aus dem Obigen hervorgeht, rein logischer Art. Er will keine Streitschrift gegen die Bohrsche Theorie sein. Nur einen Standpunkt will er bekämpfen, denjenigen, der sich auf Voraussetzungen stützt, die sich gegenseitig widersprechen.

2. Wir nehmen an, daß außerhalb einer geschlossenen Fläche F die Maxwell-Lorentzschen Gleichungen für das Vakuum gelten. Wir stellen uns die Aufgabe unter dieser Voraussetzung das elektromagnetische Feld zu berechnen, das sich von der Fläche F aus ausbreitet, wenn auf dieser Fläche $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ bestimmte Werte haben.

Außerhalb von F gelten nach unseren Annahmen die Gleichungen:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \text{(I)}$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0.$$

Wir setzen:

$$\boldsymbol{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi', \quad \boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}',$$

wo für $t < \tau - \frac{r}{c}$:

$$\boldsymbol{A}' = \frac{\boldsymbol{a}}{r}\left(\tau - t - \frac{r}{c}\right)^2$$

und:

$$\varphi' = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})\frac{c}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\left(\tau - t - \frac{r}{c}\right)^3\right\},$$

während für $t > \tau - \frac{r}{c}$: $\boldsymbol{A}' = \varphi' = 0$ ist. — $\boldsymbol{r}$ ist hier der Vektor $P_0 \rightarrow P$. P_0 ist ein fester Punkt im Raume, der im Momente τ außerhalb von F liegt. $\boldsymbol{a}$ ist ein beliebiger Vektor. — Außerhalb einer Kugel $r = r_0$, wo r_0 beliebig klein ist, sind $\boldsymbol{E}'$ und $\boldsymbol{H}'$ stetige und stetig differenzierbare Vektorfunktionen von P und t und genügen dem System (I). Außerhalb der beiden Flächen $r = r_0$ und F haben wir also:

$$\boldsymbol{E}' \times \operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{E} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{H}'$$
$$- \boldsymbol{H}' \times \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}')$$

oder:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}') =$$
$$= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}').$$

Wir wollen diese Gleichung über den ganzen Raum Ω, außerhalb der beiden Flächen $r = r_0$ und F und zwischen den Grenzen $t = t_0$ und $t = \tau - \frac{r_0}{c}\left(t_0 < \tau - \frac{r_0}{c}\right)$ integrieren. Wir haben:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}')\, d\omega =$$
$$= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}')\, d\omega -$$
$$- \int_F (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}') \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}\, dS,$$

wenn $\boldsymbol{v}$ die Geschwindigkeit des Flächenelementes dS und $\boldsymbol{n}$ ein nach außen gezogener, zu dS senkrecht stehender Einheitsvektor ist. Wir bekommen also:

$$\frac{1}{c}\Big|_{t=t_0}^{t=\tau-\frac{r_0}{c}} \int_\Omega (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}')\, d\omega +$$
$$+ \frac{1}{c}\int_{t_0}^{\tau-\frac{r_0}{c}} dt \int_F (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}') \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \cdot dS +$$
$$+ \int_{t_0}^{\tau-\frac{r_0}{c}} dt \int_{r=r_0} (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}') \times \boldsymbol{n}\, dS +$$

1) A. Sommerfeld, Die allgemeine Dispersionsformel nach dem Bohrschen Modell, Elster- und Geitel-Festschrift 1915. Herrn Debyes Arbeit war mir nicht zugänglich.

$$+\int_{t_0}^{\tau-\frac{r_0}{c}} dt \int_F (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}') \times \boldsymbol{n}\, dS = 0.$$

Folglich:

$$\int_{t_0}^{\tau-\frac{r_0}{c}} dt \int_{r=r_0} (\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{E}' - \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}') \times \boldsymbol{n}\, dS =$$

$$= \frac{1}{c}\int_{\Omega(t_0)} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}')_{t_0}\, d\omega -$$

$$- \int_{t_0}^{\tau-\frac{r_0}{c}} dt \int_F (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{H}')\, dS,$$

wenn:

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{n} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} =$$

$$= \frac{1}{c}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} - \left(\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{E}\right) \wedge \boldsymbol{n},$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H} =$$

$$= \frac{1}{c}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} + \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}\right) \wedge \boldsymbol{n}.$$

Wir wollen in unserer Gleichung den Grenzübergang $r_0 = 0$ ausführen. Wir haben:

$$\boldsymbol{E}' = \left\{\frac{c}{3r^3}\left(\tau - t - \frac{r}{c}\right)^3 + \frac{1}{r^2}\left(\tau - t - \frac{r}{c}\right)^2\right\}$$

$$\left\{\boldsymbol{a} - 3(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right\} + \frac{2}{cr}\left(\tau - t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\left\{\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\right\},$$

$$\boldsymbol{H}' = \left\{\frac{1}{r^3}\left(\tau - t - \frac{r}{c}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{cr^2}\left(\tau - t - \frac{r}{c}\right)\right\}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{r}).$$

Folglich;

$$\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}' = \{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}\}$$

$$\left\{\frac{1}{r^3}\left(\tau - t - \frac{r}{c}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\tau - t - \frac{r}{c}\right)\right\}.$$

Wir haben, wenn r_0 sehr klein ist:

$$\frac{1}{r_0^3}\int_{r=r_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n} \cdot dS = \frac{4\pi}{3}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a})_{P_0},$$

$$\frac{1}{r_0^3}\int_{r=r_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} \cdot dS = 4\pi(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a})_{P_0}.$$

Also:

$$\lim_{r_0=0}\int_{r=r_0} \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}' \times \boldsymbol{n} \cdot dS =$$

$$= -\frac{8\pi}{3}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a})_{P_0}(\tau - t)^2.$$

Man hat ebenso:

$$\lim_{r_0=0}\frac{1}{r_0^3}\int_{r=r_0} \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n} \cdot dS =$$

$$= \lim_{r_0=0}\frac{1}{r_0^3}\boldsymbol{a} \times \int_{r=r_0} \boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{H} \cdot dS = \frac{4\pi}{3}(\operatorname{rot}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{a})_{P_0},$$

während:

$$\lim_{r_0=0}\frac{1}{r_0^5}\int_{r=r_0} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} \cdot dS$$

ersichtlich den Wert Null hat, weil $\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{n} = 0$. Der Grenzübergang ergibt also links:

$$\frac{8\pi}{3}\int_{t_0}^{\tau} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a})_{P_0, t}(\tau - t)^2\, dt +$$

$$+ \frac{4\pi c}{9}\int_{t_0}^{\tau} (\operatorname{rot}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{a})_{P_0, t}(\tau - t)^3\, dt.$$

Das letzte Glied können wir auch:

$$\frac{4\pi}{9}\int_{t_0}^{\tau}\left(\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \times \boldsymbol{a}\right)_{P_0, t}(\tau - t)^3\, dt =$$

$$= -\frac{4\pi}{9}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a})_{P_0, t}(\tau - t_0)^3 +$$

$$+ \frac{4\pi}{3}\int_{t_0}^{\tau} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a})_{P, t}(\tau - t)^2\, dl$$

schreiben. Wir bekommen also:

$$4\pi\int_{t_0}^{\tau} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a})_{P_0, t}(\tau - t)^2\, dt =$$

$$= \frac{4\pi}{9}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{a})_{P_0, t_0}(\tau - t_0)^3 +$$

$$+ \lim_{r_0=0}\frac{1}{c}\int_{\Omega(t_0)} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}')_{t_0}\, d\omega -$$

$$- \int_{t_0}^{\tau} dt \int_F (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{H}')\, dS.$$

Wir hatten:

$$\boldsymbol{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi'.$$

Wir betrachten:

$$\lim_{r_0=0}\frac{1}{c}\int_{\Omega(t_0)} \boldsymbol{E} \times \operatorname{grad}\varphi' \cdot d\omega =$$

$$= -\frac{1}{c}\lim_{r_0=0}\int_{r=r_0} \varphi' \cdot \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n} \cdot dS -$$

$$-\frac{1}{c}\int_F \varphi' \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{n} \cdot dS.$$

Wenn r klein ist, so haben wir annähernd:

$$\varphi' = -\frac{c}{3r^3} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{r} \cdot (\tau - t)^3.$$

Wir bekommen also:

$$-\frac{1}{c} \lim_{r_0 = 0} \int_{r = r_0} \varphi' \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{n} \cdot dS =$$

$$= \lim_{r_0 = 0} \frac{(\tau - t)^3}{3 r_0^2} \int_{r = r_0} \mathbf{E} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{n} \cdot dS =$$

$$\frac{4\pi}{9} \mathbf{E} \times \mathbf{a} \cdot (\tau - t)^3.$$

Wir haben also:

$$4\pi \int_{t_0}^{\tau} (\mathbf{E} \times \mathbf{a})_{P_0, t} (\tau - t)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{c} \int_{F, t_0} \varphi' (\mathbf{E} \times \mathbf{n})\, ds +$$

$$+ \frac{1}{c} \int_{\Omega(t_0)} \left(\mathbf{H} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}' - \frac{1}{c} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} \right)_{t = t_0} d\omega -$$

$$- \int_{t_0}^{\tau} dt \int_F (\mathbf{A} \times \mathbf{E}' + \mathbf{B} \times \mathbf{H}')\, dS.$$

Wir differenzieren diese Gleichung dreimal in bezug auf τ. Links erhalten wir:

$$8\pi (\mathbf{E} \times \mathbf{a})_{P_0, \tau}.$$

Rechts ergibt das erste Glied:

$$-2 \int_{F, t_0} \mathbf{E} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{r} \frac{dS}{r^3};$$

das zweite:

$$\frac{2}{c} \frac{d}{d\tau} \int_{r = c(\tau - t_0)} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{r} \mathbf{H} \wedge \mathbf{r} \right) \times \mathbf{a} \frac{dS}{r} -$$

$$-2 \int_{r = c(\tau - t_0)} \mathbf{H} \wedge \mathbf{r} \times \mathbf{a} \frac{dS}{r^3}$$

und das dritte:

$$-2c \iint_{t_0 < t < \bar{t}} \left\{ \mathbf{A} \times \mathbf{a} - \frac{3}{r^2} \mathbf{A} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{r} \right\} \frac{dS\, dt}{r^3} -$$

$$-2 \frac{d}{d\tau} \iint_{t_0 < t < \bar{t}} \left\{ \mathbf{A} \times \mathbf{a} - \frac{3}{r^2} \mathbf{A} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{r} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r} \mathbf{B} \wedge \mathbf{r} \times \mathbf{a} \right\} \frac{dS\, dt}{r^2} - \frac{2}{c} \frac{d^2}{d\tau^2} \iint_{t_0 < t < \bar{t}} \left\{ \mathbf{A} \times \mathbf{a} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r^2} \mathbf{A} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{r} - \frac{1}{r} \mathbf{B} \wedge \mathbf{r} \times \mathbf{a} \right\} \frac{dS\, dt}{r}.$$

Unter $\bar{t}$ verstehen wir hier denjenigen t-Wert, der für ein bestimmtes Flächenelement dS der Bedingung:

$$\tau - \bar{t} = \frac{1}{c} r(P_0, dS, \bar{t})$$

genügt. Wir haben also:

$$d\tau = d\bar{t} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial t} \right)_{\bar{t}}$$

oder:

$$\frac{d\bar{t}}{d\tau} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial t} \right)_{\bar{t}}}.$$

Aus dem Ausdruck für $(\mathbf{E} \times \mathbf{a})_{P_0, \tau}$, den wir auf diese Weise erhalten, können wir leicht den Wert von $\mathbf{E}(P_0, \tau)$ ablesen. Wir bekommen:

$$\mathbf{E}(P_0, \tau) = -\frac{1}{4\pi} \int_{F(t_0)} \mathbf{E} \times \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}\, dS}{r^3} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{d\tau} \int_{r = c(\tau - t_0)} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{r} \mathbf{H} \wedge \mathbf{r} \right) \frac{dS}{r} -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_{r = c(\tau - t_0)} \mathbf{H} \wedge \mathbf{r} \cdot \frac{dS}{r^3} -$$

$$- \frac{c}{4\pi} \iint_{t_0 < t < \bar{t}} \left\{ \mathbf{A} - \frac{3}{r^2} \mathbf{A} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right\} \frac{dS\, dt}{r^3} -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int \left[\left\{ \mathbf{A} - \frac{3}{r^2} \mathbf{A} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{r} \mathbf{B} \wedge \mathbf{r} \right\} \frac{dS}{r^2 \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial t} \right)} \right]_{\bar{t}} -$$

$$- \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{d\tau} \int \left[\left\{ \mathbf{A} - \frac{1}{r^2} \mathbf{A} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{r} \mathbf{B} \wedge \mathbf{r} \right\} \frac{dS}{r \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial t} \right)} \right]_{\bar{t}}.$$

Man findet in derselben Weise:

$$\mathbf{H}(P_0, \tau) = -\frac{1}{4\pi} \int_{F(t_0)} \mathbf{H} \times \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}\, dS}{r^3} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{d\tau} \int_{r = c(t - t_0)} \left(\mathbf{H} + \frac{1}{r} \mathbf{E} \wedge \mathbf{r} \right) \frac{dS}{r} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{r = c(\tau - t_0)} \mathbf{E} \wedge \mathbf{r} \frac{dS}{r^3} -$$

$$- \frac{c}{4\pi} \iint_{t_0 < t < \bar{t}} \left\{ \mathbf{B} - \frac{3}{r^2} \mathbf{B} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right\} \frac{dS\, dt}{r^3} -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\left[\left\{\boldsymbol{B}-\frac{3}{r^2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{r}\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{r}\right\}\frac{dS}{r^2\left(1+\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t}\right)}\right]_{\bar{t}}-$$

$$-\frac{1}{4\pi c}\frac{d}{d\tau}\int\left[\left\{\boldsymbol{B}-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{r}\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{r}\right\}\frac{dS}{r\left(1+\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t}\right)}\right]_{\bar{t}}.$$

3. Wir wollen jetzt die Lorentzsche Annahme einführen, wonach keine Energiezufuhr vom unendlich Fernen stattfindet. Wir wollen etwa annehmen, daß für $t<T$ im ganzen Raume ein elektrostatisches Feld herrscht, das von im Endlichen gelegenen Massen herrührt. Unter diesen Umständen bleiben für jedes t die Vektoren:

$$r^2\boldsymbol{E} \text{ und } r^2\boldsymbol{H}$$

bei wachsendem r unterhalb einer endlichen Grenze, und wir haben:

$$\lim_{t_0=-\infty}\int\left(\boldsymbol{E}-\frac{1}{r}\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{r}\right)\frac{dS}{r}=0 \text{ usw.}$$

$\bar{t}_{\min}$ sei der kleinste $\bar{t}$-Wert, der, bei festgehaltenen P_0 und τ, einem Flächenelemente dS zukommt. t_1 sei ein beliebiger t-Wert, der den Bedingungen: $t_0<t_1<\bar{t}_{\min}$ genügt. Ich behaupte, daß dann:

$$\int_{F(t_0)}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{r}\,dS}{r^3}+$$

$$+c\int_{t_0}^{t_1}dt\int_{F(t)}\left\{\boldsymbol{A}-\frac{3}{r^2}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right\}\frac{dS}{r^3}=$$

$$=\int_{F(t_1)}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{r}\,dS}{r^3}.$$

Wir können das linke Glied dieser Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$\operatorname{grad}_{P_0}\int_{F(t_0)}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}\cdot\frac{dS}{r}-c\operatorname{grad}_{P_0}\operatorname{div}_{P_0}\int_{t_0}^{t_1}dt\int\frac{\boldsymbol{A}\,dS}{r}.$$

Wir hatten:

$$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{n}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}.$$

Wir betrachten das Integral:

$$\int_F\frac{\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{n}\,dS}{r}=\int\operatorname{rot}_P\frac{\boldsymbol{H}}{r}d\omega,$$

wo die Integration rechts sich über den ganzen Raum außerhalb von F erstreckt. Wir haben:

$$\operatorname{rot}_P\frac{\boldsymbol{H}}{r}=\frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{H}}{r}+\boldsymbol{H}\wedge\operatorname{grad}_{P_0}\frac{1}{r}$$

und folglich, wie man leicht sieht:

$$\operatorname{div}_{P_0}\int_{t_0}^{t_1}dt\int\frac{\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{n}\,dS}{r}=\frac{1}{c}\operatorname{div}_{P_0}\int_{t_0}^{t_1}dt\int\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}d\omega.$$

Also:

$$-\operatorname{div}_{P_0}\int_{t_0}^{t_1}dt\int\frac{\boldsymbol{A}\,dS}{r}=$$

$$=\frac{1}{c}\operatorname{div}_{P_0}\int_{t_0}^{t_1}dt\left\{\int\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\frac{d\omega}{r}-\int_{F(t)}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\frac{dS}{r}\right\}=$$

$$=\frac{1}{c}\operatorname{div}_{P_0}\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\int\boldsymbol{E}\frac{d\omega}{r}=$$

$$=\frac{1}{c}\operatorname{div}_{P_0}\left\{\int_{F(t_1)}\boldsymbol{E}\frac{d\omega}{r}-\int_{F(t_0)}\boldsymbol{E}\frac{d\omega}{r}\right\}=$$

$$=\frac{1}{c}\int_{F(t_1)}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}\frac{dS}{r}-\frac{1}{c}\int_{F(t_0)}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}\cdot\frac{dS}{r}.$$

Also schließlich:

$$\operatorname{grad}_{P_0}\int_{F(t_0)}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}\frac{dS}{r}-c\operatorname{grad}_{P_0}\operatorname{div}_{P_0}\int_{t_0}^{t_1}dt\int\frac{\boldsymbol{A}\,dS}{r}=$$

$$=\operatorname{grad}_{P_0}\int_{F(t_1)}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}\cdot\frac{dS}{r}.$$

Man hat natürlich ebenso:

$$\operatorname{grad}_{P_0}\int_{F(t_0)}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}\frac{dS}{r}-c\operatorname{grad}_{P_0}\operatorname{div}_{P_0}\int_{t_0}^{t_1}dt\int\frac{\boldsymbol{B}\,dS}{r}=$$

$$=\operatorname{grad}_{P_0}\int_{F(t_1)}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}\cdot\frac{dS}{r}$$

Wir können unseren Gleichungen für $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ also auch die folgende Form geben:

$$\boldsymbol{E}(P_0,\tau)=-\frac{1}{4\pi}\int_{F(\bar{t}_{\min})}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{r}\,dS}{r^3}-$$

$$-\frac{c}{4\pi}\iint_{\bar{t}_{\min}<t<\bar{t}}\left\{\boldsymbol{A}-\frac{3}{r^2}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right\}\frac{dS\,dt}{r^3}-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\left[\left\{\boldsymbol{A}-\frac{3}{r^2}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{r}\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{r}\right\}\frac{dS}{r^2\left(1+\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t}\right)}\right]_{\bar{t}}- \qquad \text{(II)}$$

$$-\frac{1}{4\pi c}\frac{d}{d\tau}\int\left[\left\{\boldsymbol{A}-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{r}\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{r}\right\}\frac{dS}{r\left(1+\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t}\right)}\right]_{\bar{t}},$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(P_0,\tau) = &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{F(\bar{t}_{\min})} \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{r}\,dS}{r^3} - \\
&-\frac{c}{4\pi}\iint\limits_{\bar{t}_{\min}<t<\bar{t}} \left\{\boldsymbol{B}-\frac{3}{r^2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right\}\frac{dS\,dt}{r^3} - \\
&-\frac{1}{4\pi}\int\left[\left\{\boldsymbol{B}-\frac{3}{r^2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{1}{r}\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{r}\right\}\frac{dS}{r^2\left(1+\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t}\right)}\right]_{\bar{t}} - \qquad \text{(III)} \\
&-\frac{1}{4\pi c}\frac{d}{d\tau}\int\left[\left\{\boldsymbol{B}-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{1}{r}\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{r}\right\}\frac{dS}{r\left(1+\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t}\right)}\right]_{\bar{t}}.
\end{aligned}
$$

Wenn man in diesen Gleichungen rechts für $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ bestimmte Vektorfunktionen einsetzt, so genügen die so bestimmten Vektorfunktionen $\boldsymbol{E}(P_0,\tau)$, $\boldsymbol{H}(P_0,\tau)$ den Maxwellschen Gleichungen. Dagegen nehmen sie im allgemeinen auf der Fläche F nicht die dort angenommenen Werte an.

4. P_1 sei ein beliebiger Punkt innerhalb von F. Wir nehmen in diesem Paragraphen an, daß man in den obigen Formeln für solche Punkte P_0, deren Entfernungen von F im Verhältnis zu den Abmessungen dieser Fläche groß sind, ohne merklichen Fehler $\bar{t}$ mit $\bar{t}_{P_1}$ ersetzen kann, wo $\bar{t}_{P_1}$ der durch die Beziehung:

$$\bar{t}_{P_1} = \tau - \frac{1}{c}\,r(P, P_1, \bar{t}_{P_1})$$

gekennzeichnete t-Wert ist. Wenn d der größte Durchmesser der Fläche F ist, so nehmen wir also an, daß die Abänderungen, die $\boldsymbol{r}$, r, $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ in einem Punkte der Fläche F während der Zeit $\frac{d}{c}$ erleiden, vernachlässigt werden können. Überdies nehmen wir an, daß man das zweite Glied in dem Ausdruck für $\boldsymbol{E}(P_0,\tau)$ und ebenso das zweite Glied in dem Ausdruck für $\boldsymbol{H}(P_0,\tau)$ vernachlässigen kann. Endlich nehmen wir an, daß $\boldsymbol{v}$ annähernd denselben Wert für alle dS hat. — Wir setzen:

$$\int\limits_{F(\bar{t}_{P_1})}\boldsymbol{A}\,dS = \boldsymbol{a},\quad \int\limits_{F(\bar{t}_{P_1})}\boldsymbol{B}\,dS = \boldsymbol{b},\quad \int\limits_{F(\bar{t}_{P_1})}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{n}\,dS = e,$$

$$\int\limits_{F(\bar{t}_{P_1})}\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}\cdot dS = 0$$

und erhalten dann annähernd:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(P_0,\tau) = &-\frac{e}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right]_{\bar{t}_{P_1}} - \frac{1}{4\pi}\left[\left\{\boldsymbol{a} - \right.\right. \\
&\left.\left. -\frac{3}{r^2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} - \frac{1}{r}\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{r}\right\}\frac{1}{r^2\left(1+\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t}\right)}\right]_{\bar{t}_{P_1}} - \qquad \text{(IV)} \\
&-\frac{1}{4\pi c}\frac{d}{d\tau}\left[\left\{\boldsymbol{a} - \frac{1}{r^2}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} - \right.\right. \\
&\left.\left. - \frac{1}{r}\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{r}\right\}\frac{1}{r\left(1+\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t}\right)}\right]_{\bar{t}_{P_1}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(P_0,\tau) = &-\frac{1}{4\pi}\left[\left\{\boldsymbol{b} - \frac{3}{r^2}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{1}{r}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{r}\right\}\frac{1}{r^2\left(1+\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t}\right)}\right]_{\bar{t}_{P_1}} - \qquad \text{(V)} \\
&-\frac{1}{4\pi c}\frac{d}{d\tau}\left[\left\{\boldsymbol{b} - \frac{1}{r^2}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} + \right.\right. \\
&\left.\left. + \frac{1}{r}\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{r}\right\}\frac{1}{r\left(1+\frac{1}{c}\frac{\partial r}{\partial t}\right)}\right]_{\bar{t}_{P_1}}.
\end{aligned}
$$

Wenn man in diesen Formeln $\boldsymbol{a} = \frac{e}{c}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b} = 0$ setzt, so gehen sie in die gewöhnlichen Liénard-Wiechertschen Formeln über. Betreffs der Wirkung eines Elektrons nach außen sind also die Annahmen, die die gewöhnliche Elektronentheorie außer den hier eingeführten macht, damit gleichbedeutend, daß für eine das Elektron umschließende und begleitende Fläche F die Integrale:

$$\int\limits_{F(\bar{t}_{P_1})}\left(\boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{E}\right)dS,\quad \int\limits_{F(\bar{t}_{P_1})}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H}\right)dS$$

verschwinden sollen.

Für die Energieausstrahlung, die von der Fläche F aus stattfindet, sind die Vektoren:

$$\frac{d}{d\tau}\left[(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{l} - \boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{l})\frac{1}{1+\frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{l})}\right]_{\bar{t}_{P_1}}$$

maßgebend. $\boldsymbol{l}$ ist hier ein beliebiger Einheitsvektor. Die Bedingung dafür, daß keine Energieausstrahlung stattfinden soll, ist, daß diese Vektoren, bei beliebigem $\boldsymbol{l}$, verschwinden.

Wir betrachten unsere Fläche F in einem beliebigen Momente t. Durch eine Lorentz-Transformation können wir bewirken, daß die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ in diesem Momente ver-

schwindet, und daß die Beschleunigung $\boldsymbol{v}'$, von welcher wir annehmen wollen, daß sie nicht verschwindet, längs der x-Achse fällt. Die Bedingung für das Verschwinden der Ausstrahlung läßt sich unter diesen Umständen folgendermaßen schreiben:

$$\boldsymbol{l} \wedge (\boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{a}') + \boldsymbol{b}' \wedge \boldsymbol{l} - \boldsymbol{l} \wedge \left(\boldsymbol{l} \wedge \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{l})\,\boldsymbol{a}\right) - \\ - \frac{1}{c}\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{l} = 0$$

bei beliebigem $\boldsymbol{l}$. Diese Bedingung kann nur dann erfüllt sein, wenn jede Komponente unseres Ausdruckes den Faktor $l_x{}^2 + l_y{}^2 + l_z{}^2 - 1$ enthält. Dies kann wiederum nur dann der Fall sein, wenn die Glieder dritten Grades in l_x, l_y, l_z den Faktor $l_x{}^2 + l_y{}^2 + l_z{}^2$ enthalten. Wir müssen also:

$$\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{l} = \varphi\, \boldsymbol{l} \times \boldsymbol{l}$$

haben, wo $v'_y = v'_z = 0$. Das ist nur dann möglich, wenn $\boldsymbol{a} = \varphi = 0$. Indem man die Glieder zweiten Grades in derselben Weise behandelt, findet man: $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}' = 0$. Wir sehen also, daß die Ausstrahlung von einer beschleunigten Fläche F dann und nur dann dauernd verschwindet, wenn in jedem Augenblick, auf ein mitbewegtes Koordinatensystem bezogen, die Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ den Wert Null haben.

Wenn die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ konstant ist, so können wir stets $\boldsymbol{v} = 0$ annehmen. Als Bedingung dafür, daß keine Ausstrahlung stattfindet, ergibt sich zunächst, wenn die quasistationäre Berechnungsweise gestattet ist:

$$\left[\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} - \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \times \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{l} - \frac{d\boldsymbol{b}}{dt} \wedge \boldsymbol{l}\right]_{t_{P_1}} = 0$$

für jeden Einheitsvektor $\boldsymbol{l}$. Aus dieser Gleichung folgt, wenn wir $\boldsymbol{l}$ parallel $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ wählen:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} \wedge \frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = 0;$$

wenn dagegen:

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} \times \boldsymbol{l} = 0:$$

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{b}}{dt} \wedge \boldsymbol{l}.$$

$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ muß also sowohl parallel mit $\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}$ wie senkrecht zu diesem Vektor sein. Es folgt hieraus, daß:

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{b}}{dt} = 0$$

und also:

$$\boldsymbol{a} = \text{Konst.},\ \boldsymbol{b} = \text{Konst.}$$

Wenn $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ auf F periodische Funktionen von t sind, so folgt ferner: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = 0$. Wir haben in der Tat oben bewiesen, daß:

$$\int_F (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n})_{t_1} \frac{dS}{r} - \int (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n})_{t_0} \frac{dS}{r} = \\ = -c \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{div}_{P_0} \int \frac{\boldsymbol{A}\, dS}{r}\, dt,$$

wenn $t_0 < t_1 < \bar{t}_{\min}$. Rechts haben wir in dieser Gleichung annähernd:

$$-c\,(t_1 - t_0) \operatorname{div}_{P_0} \frac{\boldsymbol{a}}{r},$$

während wir links eine periodische Funktion von t_1 haben. Die Gleichung kann also nur dann bestehen, wenn (bis auf Größen von der Ordnung $\frac{1}{r^3}$):

$$\int_F (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n})_{t_1} \frac{dS}{r} = \int_F (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{n})_{t_0} \frac{dS}{r}$$

und:

$$\boldsymbol{a} = 0.$$

Man zeigt in derselben Weise, daß $\boldsymbol{b} = 0$.

Wir haben in diesen Betrachtungen in keiner Weise von der Annahme Gebrauch gemacht, daß die zweiten Glieder rechts in den Ausdrücken für $\boldsymbol{E}(P_0, \tau)$ und $\boldsymbol{H}(P_0, \tau)$ klein sind. Unsere Resultate bleiben also bestehen, wenn man diese Annahme fallen läßt. Dagegen beruhen sie, wie unmittelbar ersichtlich ist, wesentlich auf der Annahme, daß eine quasi-stationäre Berechnungsweise erlaubt ist. Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, welche Vorsicht in diesem Punkt geboten ist, zumal wenn $\boldsymbol{a}$ oder $\boldsymbol{b}$ verschwindet.

5. Gemäß der Bohrschen Theorie besteht ein Wasserstoffatom aus einer positiven Elementarladung, um welche sich ein Elektron in einer kreisförmigen Bahn bewegt. Es soll keine Energieausstrahlung stattfinden, wenn die Masse des Elektrons m, der Bahnradius R und die Winkelgeschwindigkeit w die Bedingung erfüllen

$$m R^2 w = \frac{hn}{2\pi},$$

wobei n eine beliebige ganze Zahl ist. Wendet man die gewöhnlichen dynamischen Gesetze an und nimmt man an, daß zwischen dem positiven Kern und dem Elektron die gewöhnliche elektrostatische Kraft wirkt, so erhält man weiter:

$$m R w^2 = \frac{e^2}{R^2},$$

wobei e die elektrostatisch gemessene Elementarladung ist. Daraus ergibt sich

$$R = \frac{h^2 n^2}{4\pi^2 e^2 m}.$$

Jeder Linie in der sog. ersten Nebenserie des Wasserstoffs entspricht ein gewisser ganzzahliger Wert $n \geqq 3$. Die Werte für n, die auf diese Weise sozusagen experimentell bekannt sind, sind 3, 4 .... 31, wozu der für diese Serie grundlegende Wert $n = 2$ kommt.

Um den Mittelpunkt eines Wasserstoffatoms legen wir eine Kugel S mit dem Radius R_0. Wir nehmen an, daß die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum außerhalb und auf der Kugel S gültig sind. Unter dieser Voraussetzung wollen wir die davon ausgestrahlte Energie berechnen. Gemäß unsern allgemeinen Formeln haben wir für diesen Zweck nur das Integral zu berechnen:

$$\int_S \{\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{l} - \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{l}\}_{\bar{t}}\, dS,$$

wobei $\boldsymbol{l}$ ein beliebiger Einheitsvektor ist, oder auch der dem absoluten Betrage nach damit gleichgroße Vektor

$$\int_S \{\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{l} + \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{l}\}_{\bar{t}}\, dS.$$

Wir haben mit andern Worten die beiden Vektoren zu berechnen:

$$\int_S \boldsymbol{A}_{\bar{t}}\, dS \quad \text{und} \quad \int_S \boldsymbol{B}_{\bar{t}}\, dS.$$

Wir untersuchen zunächst, unter welchen Verhältnissen wir eine quasi-stationäre Berechnungsart anwenden können. Die Zeit, die eine Lichtwelle im Vakuum brauchen würde, um über die Kugel S zu passieren, ist $\frac{2R_0}{C}$. Während dieser Zeit bewegt sich das Elektron in einem Winkel $\frac{2R_0 w}{c}$ um den positiven Kern und führt dabei sein ganzes elektromagnetisches Feld mit sich. Die Veränderung, die z. B. $\boldsymbol{E}$ während dieser Zeit erleidet, ist dieselbe, die man erhält, wenn man sich in einem gewissen bestimmten Zeitmoment ein Stück von höchstens $\frac{2R_0^2 w}{c}$ auf S fortbewegt. Wenn wir mit Bohr annehmen, daß das Elektron die gewöhnliche elektrostatische Kraft ausübt, so können wir setzen:

$$\boldsymbol{E} = -e\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$

wobei $\boldsymbol{r}$ der Vektor ist, der vom Elektron zu den betrachteten Punkten des Feldes geht. Man hat also:

$$|\boldsymbol{E}| = \frac{e}{r^2}.$$

Man ersieht leicht, daß die fragliche Änderung $\triangle \boldsymbol{E}$ die Ungleichung

$$|\triangle \boldsymbol{E}| < \frac{2\sqrt{6}R_0^2 we}{cr^3}$$

erfüllt, und also:

$$\frac{|\triangle \boldsymbol{E}|}{|E|} \leqq \frac{2\sqrt{6}R_0^2 w}{cr} \leqq \frac{2\sqrt{6}R_0^2 w}{c(R_0 - R)}.$$

Der Wert des letztgenannten Bruches ist, wenn $n = 30$ und $R_0 = 10^{-4}$ cm ungefähr $2 \cdot 10^{-2}$. Man sieht also, daß, sofern nicht das von $\boldsymbol{E}_{\bar{t}P_1}$ selbst herrührende Glied in unserem Integral:

$$\int_S \boldsymbol{B}_{\bar{t}}\, dS$$

verschwindet, für $n = 30$ eine quasi-stationäre Berechnungsart noch für $R_0 = 10^{-4}$ cm erlaubt ist. Zu einem ähnlichen Resultat kommt man betreffend $\boldsymbol{H}$, wenn man setzt:

$$\boldsymbol{H} = -\frac{e}{cr^3} \cdot \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{r},$$

($\boldsymbol{v}$ = Geschwindigkeit des Elektrons).

Die elektrischen und magnetischen Kräfte, mit welchen Bohr in seinem Atommodell rechnet, sind gerade die obengenannte elektrostatische Kraft $\boldsymbol{E}$ und die dazugehörige magnetische Kraft $\boldsymbol{H}$.

Wir können nun leicht den Wert des Integrals

$$\int_S \boldsymbol{A}_{\bar{t}}\, dS$$

berechnen. Eine quasi-stationäre Berechnungsweise ist unter den oben angegebenen Umständen erlaubt, und weiter können wir $\frac{R}{R_0}$ neben 1 vernachlässigen. Man erhält so

$$\frac{e}{c}\int (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{R}_0) \wedge \boldsymbol{n} \frac{dS}{R_0^3} = -\frac{8\pi e}{3c}\boldsymbol{v}.$$

Bei der Berechnung von

$$\int_S \boldsymbol{B}_{\bar{t}}\, dS = \int_S (\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{n})_{\bar{t}}\, dS$$

trifft der Fall ein, daß das Glied, das wir erhalten, wenn $\bar{t}$ durch einen konstanten t-Wert ersetzt wird, verschwindet. Wir müssen also hier die Approximation einen Schritt weiter treiben. Wir setzen:

$$\bar{t} = \bar{t}_1 + \frac{\boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{l}}{c}$$

und

$$\boldsymbol{E}_{\bar{t}} = \boldsymbol{E}_{\bar{t}_1} + \frac{\boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{l}}{c}\left(\frac{\delta \boldsymbol{E}}{\delta t}\right)_{\bar{t}_1} =$$

$$= -\frac{e\boldsymbol{R}_0}{R_0^3} - \frac{e}{cR_0^3} \cdot \boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{l}\left(\boldsymbol{v} - \frac{3}{R_0^2}\boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{R}_0\right),$$

indem wir wiederum $\frac{R}{R_0}$ neben 1 vernachlässigen und also setzen:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}_0$$

für einen Punkt auf S. Wir erhalten daraus:

$$\int_S \boldsymbol{B}_t \, dS = -\frac{e}{c R_0^3} \int_S \boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{n} \, dS =$$

$$= \frac{4\pi e}{3c} \cdot \boldsymbol{l} \wedge \boldsymbol{r}.$$

Man bekommt also:

$$\int_S \{\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{l} - \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{l}\}_t \, dS =$$

$$= 4\pi e \cdot \boldsymbol{l} \wedge \left(\boldsymbol{l} \wedge \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right).$$

Die daraus berechnete Ausstrahlung ist genau dieselbe, wie die gewöhnliche aus den Liénard-Wiechertschen Formeln gewonnene, ein Resultat, das von vornherein zu erwarten war.

Wir haben also gefunden: Wenn man ein Bohrsches Wasserstoffatom mit einer solchen Kugel umgeben will, daß die Maxwellschen Gleichungen außerhalb desselben als gültig angesehen werden können, und wenn die Kräfte, die ein Elektron im Atom ausübt, sich auf die elektrostatische und die dazugehörige magnetische Kraft beschränken, so muß der Radius dieser Kugel größer als 10^{-4} cm sein. Sehen wir zunächst, welche Schlüsse gezogen werden können, wenn man annimmt, daß sich das in Wirklichkeit so verhält. In einer Wasserstoffatmosphäre hat ein Wasserstoffmolekül bei gewöhnlichem Druck und Temperatur einen Umkreis zur Verfügung, dessen Durchmesser im Durchschnitt von der Größenordnung 10^{-6} cm ist. Wenn die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum in einer Kugel mit dem Radius 10^{-4} um jedes Molekül ungültig sind, so findet sich überhaupt kein einziger Punkt im Raum, wo diese Gleichungen gültig sind. Dasselbe wird der Fall mit jedem Gas, jedem flüssigen oder festen Körper, dessen Atome nach Bohrs Schema gebaut sind. Die Lorentzsche Elektronentheorie, die sich auf der Annahme aufbaut, daß die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum in den Zwischenräumen zwischen allen Elektronen und positiven Kernen gelten, ist dann gerade in ihrem Prinzip unrichtig. Alle ihre Resultate müssen verworfen werden. Einen Grund, die Maxwellschen Gleichungen unter diesen Umständen als für das Vakuum gültig beizubehalten, kann ich nicht finden.

Wir müssen nun untersuchen, welche Möglichkeiten sich bieten, um diesem destruktiven Schlußsatz zu entgehen. Zunächst kann angemerkt werden, daß aus dem oben Angeführten durchaus nicht folgt, daß die Maxwellschen Gleichungen im ganzen Umkreis, der von der Sphäre S umschlossen wird, unrichtig sein müssen. — Diese Bemerkung wäre sehr wichtig, wenn man mit Herrn Gehrcke annehmen dürfte, die Maxwellschen Gleichungen seien nur in kleinen Gebieten um die strahlungsfreien Elektronbahnen ungültig. Aber das ist unmöglich. Kann eine Kugel um das Atom gelagert werden, die durchaus in dem Gebiete verläuft, in dem die Maxwellschen Gleichungen gültig sind, so kann unser Beweis angewendet werden. Man muß also annehmen, daß jede Kugel um das Atom, deren Radius kleiner ist als 10^{-4}, in das Gebiet einschneidet, in dem die Maxwellschen Gleichungen ungültig sind. Natürlich kann man sich dieses Gebiet in Gestalt einer dünnen Scheibe denken. Abgesehen von der Schwierigkeit, sich einen Kern mit dieser Aelotropie zu denken, so ist mit dieser Annahme wenig oder nichts gewonnen. Man hätte dann allerdings in einer Wasserstoffatmosphäre Stellen, in denen die Maxwellschen Gleichungen angewendet werden dürften. Aber diese wären umgeben von Gebieten, in denen sie ungültig wären. Die Lorentzsche Elektronentheorie wäre in ihrem Prinzip nichtsdestoweniger unrichtig.

Mehr verspricht eine andere Möglichkeit. Wir haben angenommen, daß die Kräfte, die das Elektron ausübt, sich beschränken auf die elektrostatische Kraft und die damit nach der Relativitätstheorie zusammengekoppelte magnetische Kraft. Nach den Liénard-Wiechertschen Formeln gehen von dem Elektron auch andere Kräfte aus. Freilich üben sie keinen Einfluß auf die Ausstrahlung aus, aber man kann sich denken, daß sie in Wirklichkeit gegen andere ausgetauscht werden müssen, die einen solchen Einfluß haben können. Es ist dabei zu beachten, daß diese Kräfte durchaus nicht nur von der Lage und Geschwindigkeit des Elektrons abhängig sein müssen; sie können auch von $\boldsymbol{v}'$, $\boldsymbol{v}''$ usw. abhängig sein, und das könnte die Erklärung sein dafür, daß sie sich nur bei stark gekrümmten Bahnen bemerkbar machen. Man könnte sich nun denken, daß die Forderung, daß keine Ausstrahlung stattfinden soll, die Quelle für eine Anzahl von Bedingungen für R und w ergeben würde, und daß diese nur von den von Bohr angenommenen Werten erfüllt würden. Wäre das möglich, so hätte man eine wie mir scheint vollkommen befriedigende Theorie erhalten. — Bei näherem Zusehen zeigen sich indessen große Schwierigkeiten. Die Forderung, daß keine Ausstrahlung statthaben soll, soll nicht nur für einen Radius R_0, sondern, innerhalb eines gewissen Gebietes, für alle Radien R_0 erfüllt sein. Daraus folgt, daß auch die Kräfte, die rücksichtlich der Ausstrahlung die von uns oben angenommenen

Kräfte kompensieren sollten, umgekehrt proportional mit dem Quadrat des Abstandes von den Elektronen abnehmen müssen. Sie müßten also einen merkbaren Einfluß auf das magnetische Feld nicht bloß in relativ großem Abstand von dem Elektron, das wir betrachteten, sondern auch in unmittelbarer Nähe des Elektrons ausüben. Nun hängt die Masse eines Elektrons wesentlich von dem Felde ab, das es um sich ausbreitet. Wenn ein Elektron in einem Atom von einem Feld von wesentlich anderer Struktur umgeben wäre, als ein Elektron in einem Kathodenstrahlenbündel, so würde seine Masse notwendig eine andere sein als die des letzteren. Aber die stärkste Stütze für die Bohrsche Hypothese ist die numerische Übereinstimmung, die er bei Anwendung des gewöhnlichen Wertes für *m* findet. Es scheint mir aus diesem Grunde unmöglich, auf dem genannten Wege der Schwierigkeit zu entgehen.

Es muß schließlich hervorgehoben werden, daß man sich natürlich auch denken kann, daß die Maxwellschen Gleichungen innerhalb eines Atoms für die Kräfte, die von dem positiven Kern und den Elektronen dieses Atoms herrühren, ungültig, für die Kräfte aber, die von andern Atomen herrühren, gültig sind. Was diese Hypothese betrifft, dürfte es genügen, darauf aufmerksam zu machen, daß sie gegen das Prinzip streitet, das seit einem halben Jahrhundert der Entwicklung der theoretischen Physik zugrunde lag: das Prinzip der Nahwirkung.

Der Schlußsatz, zu dem ich gelange, ist daher folgender: das Bohrsche Atommodell läßt sich auf keine Weise mit den Hauptannahmen der Lorentzschen Elektronentheorie vereinigen. Zwischen diesen beiden Theorien muß man wählen. Eine der beiden kann richtig sein, aber nicht beide. Eine Theorie, die sich sowohl auf Bohrs Hypothese, wie auf die Lorentzsche Elektronentheorie stützt, muß an inneren Widersprüchen leiden.

Eine solche Theorie ist die Debye-Sommerfeldsche Theorie der Dispersion des Lichtes. Es scheint mir nicht unwichtig zu sein, nachzuweisen, wo sich diese innern Widersprüche finden.

6. Es dürfte angebracht sein, zuerst einen Blick auf die Lorentzsche Theorie der Dispersion des Lichtes zu werfen. Nach Lorentz soll diese auf der Wechselwirkung zwischen den Elektronen eines Körpers beruhen. Aus der von diesen herrührenden in physikalisch kleinen Gebieten stark variierenden elektrischen Kraft bildet Lorentz einen gewissen Mittelwert. Die Summe dieses Mittelwertes und der von außen kommenden elektrischen Kraft wird die elektrische Kraft im Körper genannt, und für diese Kraft wird nachgewiesen, daß sie den Maxwellschen Gleichungen für einen Körper genügt, in dem die Dielektrizitätskonstante mit einer gewissen, im allgemeinen komplexen Funktion der Frequenz ersetzt wird. Diese Lorentzsche Theorie gehört meiner Meinung nach zum Schönsten in der theoretischen Physik. Dennoch scheinen mir zwei begründete Einwände gegen diese Theorie gemacht werden zu können. Jeder Lösung des ursprünglich vorliegenden Problems der Bewegungen der Elektronen entspricht (mit gewissen Vorbehalten) eine Lösung der partiellen Differentialgleichungen. Aber entspricht umgekehrt jeder Lösung derselben eine Lösung des Bewegungsproblems? Wie bekannt, ist das von Ritz bestritten worden. Weiter enthält die Lorentzsche elektrische Kraft im Körper einen Bestandteil, die von außen gekommene Kraft, die den Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum genügt, und die deshalb unmöglich den für den Körper geltenden Gleichungen genügen kann. Es muß sich also so verhalten, daß die von den Elektronen herrührende Kraft in zwei Teile aufgeteilt werden kann, von denen der eine die von außen kommende Kraft genau aufhebt, während der andere übrig bleibt und derjenige ist, der faktisch auf ein Elektron wirkt. Diese Aufteilung ist von Lorentz nicht vorgenommen worden. Ich glaube, daß die Unklarheit, die daraus folgte, schuld an dem Umstand ist, daß so außerordentlich häufig der logische Fehler begangen wurde, die auf ein Elektron im Körper wirkende Kraft mit der elektrischen Kraft im Körper gleich zu setzen. Ich glaube auch, daß diese Unklarheit schuld daran ist, daß ein Forscher wie Wood in seiner Optik sich genötigt sieht, Rechenschaft zu geben über Helmholtz' elastische Theorie der Dispersion des Lichtes, um seinen Lesern eine klare Vorstellung über ihr Wesen zu geben. Da ich mich kürzlich mit einer Theorie über die Drehung der Polarisationsebene in Kristallen und Flüssigkeiten beschäftigte, suchte ich aus diesem Grunde die oben besprochene Aufteilung der von den Elektronen im Körper herrührenden Kraft durchzuführen. Es zeigte sich, daß sich das leicht tun läßt. Die fragliche Kraft zerfällt in einen Teil, der den Maxwellschen Gesetzen für das Vakuum gehorcht, und dargestellt werden kann als eine von der Oberfläche des Körpers herrührende Kraft, und in einen Teil, der nur auf der Polarisation des Punktes beruht, an dem die Kraft wirkt. Nimmt man an, daß die erstgenannte und die äußere Kraft einander aufheben, so erhält man die bekannten Gesetze für die Dispersion des Lichtes. Ich bin in meiner Abhandlung[1]) nicht auf die Frage eingegangen,

1) C. W. Oseen, Über die Wechselwirkung zwischen

was die genannte Annahme bedeutet. Man findet indessen leicht, daß sie gleichbedeutend ist mit der Forderung, daß die gewöhnlichen Grenzbedingungen auf der Oberfläche des Körpers erfüllt sein müssen. Man kann diese also ableiten, ohne anzunehmen, daß die Maxwellschen Gleichungen in der Grenzschicht des Körpers gelten. Sie sind die Bedingungen dafür, daß die Lösung der Differentialgleichungen auch einer Lösung des Bewegungsproblems der Elektronen entspricht. Da die Lorentzschen Betrachtungen faktisch nicht auf die Grenzschicht angewendet werden können, scheint mir das ein unbestreitbarer Vorteil zu sein[1]).

Betrachten wir nun die Debye-Sommerfeldsche Theorie! Auch nach dieser soll die Dispersion des Lichtes auf der Wechselwirkung zwischen den Elektronen beruhen. Aber die von den Elektronen aus wirkenden Kräfte sollen nun andere sein, indem die Glieder, die eine Ausstrahlung bedingen, nicht mehr vorhanden sind. Es wird also angenommen, daß ein Elektron in einem Molekül Energie absorbieren kann, ohne Energie zu emittieren. Nach meinem in der Einleitung angeführten Satz bedeutet diese Annahme, daß die Maxwellschen Gleichungen im ganzen Raum unrichtig sind. Herr Sommerfeld denkt sich indessen offenbar wie vorher Herr Lorentz, daß eine von außen kommende Welle in den Körper eindringt, so daß die dort wirkende Kraft zum Teil von außen herrührt, obwohl dieser Teil nun den Maxwellschen Gleichungen für den leeren Raum nicht gehorchen kann. Wenn ich Herrn Sommerfeld richtig verstehe, bildet er weiter, wie vorher Lorentz, einen Mittelwert der von den Elektronen im Körper herrührenden Kraft und setzt die Summe der beiden genannten Kräfte $= \boldsymbol{E}$. Hier treffen wir nun auf die Schwierigkeit: die beiden Voraussetzungen, auf welchen Lorentz seinen Beweis gründet, daß $\boldsymbol{E}$ einem System partieller Differentialgleichungen genügt, sind nicht mehr erfüllt. Die von außen kommende Kraft genügt den Maxwellschen Gleichungen für den leeren Raum nicht mehr; die vom Körper selbst herrührende Kraft ist nicht mehr dieselbe wie vorher. Ob $\boldsymbol{E}$ unter diesen Verhältnissen einer Gleichung des Schwingungstypus entspricht, ist ganz unsicher. Man weiß nichts über das Gesetz von der Ausbreitung der Energie.

Ein anderer Gesichtspunkt: in Lorentz' Theorie wird die von außen kommende Kraft von einem Bestandteil der vom Körper herrührenden Kraft aufgehoben. Ist das hier auch der Fall? Darüber fehlt jede Auseinandersetzung. Wenn das nicht der Fall ist, so ist es unmöglich, daß $\boldsymbol{E}$ einer Gleichung des Schwingungstypus genügen kann.

Schließlich: in der Lorentzschen Theorie ist die Kraft, die auf ein Elektron wirkt, nicht $\boldsymbol{E}$, sondern $\boldsymbol{E} + a\boldsymbol{P}$. Das letzte Glied beruht auf der elektrostatischen Kraft der nächstgelegenen Elektronen. Da Herrn Sommerfelds Rechnungen als Spezialfall auch den Fall umfassen, daß die Elektronen um eine Gleichgewichtslage schwingen, so sollte ein entsprechendes Glied auch bei Herrn Sommerfeld vorkommen.

Diese Einwände beabsichtigen weder das Interesse an der schönen von Herrn Debye gefundenen numerischen Übereinstimmung noch den Wert der eleganten Rechnungen Herrn Sommerfelds herabzusetzen. Aber es schien mir notwendig darauf hinzuweisen, daß es noch zu früh ist, von einer neuen Theorie der Dispersion zu sprechen. Es ist noch nicht bewiesen, daß man mit Hilfe des Bohrschen Atommodells auch nur qualitativ die gröbsten Züge der hierhergehörigen Phänomene erklären kann.

Uppsala, 3. Oktober 1915.

(Eingegangen 8. Oktober 1915.)

zwei elektrischen Dipolen und über die Drehung der Polarisationsebene in Kristallen und Flüssigkeiten. Ann. d. Phys. **48**, 1915.

1) Anm. bei der Korrektur: Aus dem soeben erschienenen Buch „Dynamik der Kristallgitter" von Max Born (Leipzig, B. G. Teubner) ersehe ich, daß Herr Ewald sich schon 1912 mit dieser Frage beschäftigt hat.

Verbesserungen am Kadmiumphotometer für ultraviolettes Licht.

Von J. Elster und H. Geitel.

In einer früheren Mitteilung[1]) in dieser Zeitschrift haben wir auf die Vorzüge der lichtelektrischen Zellen mit Kadmium- und Zinkkathoden bei photometrischen Messungen im Ultraviolett hingewiesen; der wesentliche Vorteil gegenüber den Alkalimetallzellen liegt darin, daß sie bei unzerlegtem Lichte den sichtbaren Anteil von selbst ganz oder fast ganz ausscheiden. Beim Zink besteht ein meßbarer Photoeffekt noch im Violett bis gegen Blau, während die lichtelektrische Empfindlichkeit des Kadmiums erst bei dem alleräußersten Violett ($370\,\mu\mu$) beginnt, dessen physiologische Wirkung sehr gering ist.

Daß Intensitätsmessungen in diesem Spektralbereiche erwünscht sind, braucht kaum des Näheren ausgeführt zu werden, es genüge an die zunehmende Verwendung des Quecksilberbogenlichts zu erinnern und an gewisse geophysikalische Fragen, die auf die ultraviolette Strahlung der Sonne Bezug nehmen.

Nun bestand nach der vorigen Mitteilung bei den Kadmiumzellen noch eine gewisse Un-

1) J. Elster u. H. Geitel, diese Zeitschr. **15**, 1, 1914.

bequemlichkeit, die durch die verhältnismäßig geringe Empfindlichkeit dieses Kathodenmetalls bedingt war; zu Messungen im Sonnenlicht reichte die für die übrigen Arten von Zellen von uns angegebene Galvanometerempfindlichkeit (1 Skt. $\sim 10^{-9}$ Amp.) — besonders bei niedrigem Sonnenstand — nicht aus. Wenngleich durch Kombination eines empfindlichen Elektrometers mit einem hohen konstanten Widerstande sich in bekannter Weise jede gewünschte Empfindlichkeit der Strommessung herstellen läßt, so bietet doch die galvanometrische Meßmethode den Vorteil, daß sie von der immerhin fraglichen Konstanz eines hohen Widerstandes unabhängig ist. Außerdem ist es bequemer, wenn alle photometrischen Messungen mit Hilfe desselben Instrumentes ausführbar sind.

Es ist auf unsre Anregung hin die Firma Hartmann & Braun in Frankfurt a. M. zu der probeweisen Konstruktion eines hochempfindlichen Drehspulgalvanometers bereit gewesen und hat ein Instrument von einer Empfindlichkeit von $4{,}4 \cdot 10^{-11}$ Amp. für 1 mm Ausschlag bei 1 m Skalenabstand hergestellt. Die Schwingungsdauer beträgt 17 Sekunden und die Dämpfung, durch einen als Nebenschluß wirkenden Graphitwiderstand von $5 \cdot 10^5 \cdot \Omega$ erzielt, ist völlig befriedigend ebenso wie die Unveränderlichkeit der Nullage.

Wegen der hohen Stromempfindlichkeit ist eine gute Isolation unumgänglich, sie wird durch Bernsteinträger für die Zuleitungen und durch Trocknung des Innenraumes mittelst metallischen Natriums erreicht.

Die Schnelligkeit, mit der das Instrument aufzustellen ist, die Unabhängigkeit von magnetischen Einflüssen machen es zu Messungen der Sonnenstrahlung und der Intensität von Quecksilberbogenlampen durchaus geeignet. Erschütterungsfreie Aufstellung ist natürlich erforderlich.

Eine Vergleichung der ultravioletten Strahlung der Sonne mit der der Quecksilberlampe (ohne spektrale Zerlegung) in der Meinung, die erstere in Quecksilberlichteinheiten ausdrücken zu wollen, ist bei der durchaus verschiedenen Energieverteilung in den ultravioletten Spektren beider Lichtquellen nicht möglich. Dagegen kann die Quecksilberbogenlampe, solange sie mit demselben Strom betrieben wird und dabei dieselbe Klemmenspannung zeigt, nach Erreichung des stationären Dampfdrucks im Innern des Quarzrohres als befriedigend konstante Lichtquelle angesehen werden, eine Prüfung für die sichtbare Strahlung ist mittelst Alkalimetallzellen stets möglich.

Vergleicht man nun die Intensität des ultravioletten Sonnenlichts mit Hilfe einer Kadmiumzelle mit der einer Quecksilberlampe, die in unveränderlicher Entfernung von der Zelle aufgestellt ist, so geben die erhaltenen Verhältniszahlen zwar nicht die Sonnenstrahlung in „Quecksilberkerzen“ an, wohl aber stellen sie ein von etwaigen Empfindlichkeitsänderungen der Zelle im wesentlichen unabhängiges Maß der Sonnenstrahlung dar.

Wir haben eine solche Vergleichung probeweise ausgeführt. Die Zelle befand sich in 4 m Abstand von der Quecksilberlampe (größere Form, von Heraeus bezogen), die ihre Längsachse der Zelle zuwandte. Durch Regulierung eines Vorschaltwiderstandes wurde die Klemmenspannung auf 155 Volt eingestellt, die Stromstärke betrug dann 3,5 Amp. Die Messungen begannen erst 15′ nach der Zündung der Lampe.

An die Kadmiumzelle wurden in bekannter Weise beschleunigende Potentiale mit Hilfe einer Akkumulatorenbatterie aus kleinen Elementen angelegt. Die Spannung läßt sich hier nicht mit genügender Genauigkeit auf einen bestimmten Betrag einregulieren, daher war zunächst die Charakteristik der Zelle, d. h. der Zusammenhang zwischen der Stärke des Photostroms und der beschleunigenden Spannung bei konstanter Belichtung festzustellen. Da der Photostrom der Lichtstärke proportional ist, so ließ sich für jede angelegte Spannung der Betrag eines Skalenteiles in Bruchteilen der auf die Zelle einwirkenden Beleuchtungsintensität ausdrücken. Setzen wir diese unter den angegebenen Bedingungen gleich 100, so ergab sich folgende Zusammenstellung für das in Betracht kommende Spannungsintervall:

Belastung der Zelle in Volt	Wert eines Skalenteiles
114	5,53
154	3,35
194	2,16

Aus der graphischen Darstellung der Charakteristik mittelst der drei gefundenen Punkte läßt sich zu jeder zwischenliegenden Voltbelastung der zugehörige „Lichtwert“ eines Skalenteiles finden.

Es wurden nun bei Sonnenlicht (Sonnenhöhe $\sim 45^0$) mit derselben Kadmiumzelle unter verschiedener Voltbelastung zwei Messungen hintereinander vorgenommen. Diese ergaben:

Belastung der Zelle in Volt	Galvanometerausschlag in Sk.	Wert eines Skalenteiles (graphisch interpoliert)
147	35,5	3,75
184	54,0	2,46

Würde man hiernach die Stärke der ultravioletten Sonnenstrahlung in Hundertsteln der

Beleuchtung durch die Hg-Lampe bei 4 m Abstand ausdrücken, so erhielte man

	133,1
	132,8
Mittel	133,0

Wie bemerkt, hat die Zahl allerdings nicht die Bedeutung, daß die ultraviolette Strahlung der Sonne gleich dem 1,33 fachen der Hg-Lampe in 4 m Abstand war, wohl aber würde diese Zahl ein von der Empfindlichkeit der Zelle und der angelegten Spannung unabhängiges Maß darstellen. Allerdings ist noch vorausgesetzt, daß eine etwaige Empfindlichkeitsänderung der Zelle nicht in auswählender Weise, d. h. im ungleichen Verhältnisse für verschiedene Wellenlängen eintritt, sonst würde nämlich, bei der Verschiedenheit der ultravioletten Spektren des Sonnen- und des Hg-Lichtes eine Kontrolle durch letzteres hinfällig werden. Da aber Empfindlichkeitsänderungen an Vakuumzellen mit Argonfüllung (die stets anzuwenden ist) überhaupt nicht wahrscheinlich sind und jedenfalls nur langsam erfolgen, so dürfte das letztere Bedenken kaum in Frage kommen.

Fig. 1.

Vergleichende Messungen der genannten Art können von Interesse sein, wenn sie in einem günstigen Klima bei immer derselben Sonnenhöhe täglich vorgenommen würden; ein Einfluß der Rotationsdauer der Sonne auf ihre ultraviolette Strahlung ist, zumal bei lebhafter Fleckentätigkeit, durchaus wahrscheinlich und auf diesem Wege voraussichtlich auch nachweisbar.

Will man den benachbarten Teil des sichtbaren Sonnenspektrums bis gegen Blau mit in die Messungen einbeziehen, so hat man die Kadmiumzelle durch eine solche mit Zinkkathode zu ersetzen. Sehr bequem zu diesem Verfahren ist das Sonnenphotometer mit auswechselbarer Zellenkapsel, dessen Einrichtung aus untenstehender Figur 2 ohne weiteres verständlich ist. Hat man außer für die Zn- und Cd-Zelle noch eine besondere Kapsel für eine Alkalimetallzelle bereit, so kann man leicht nacheinander das sichtbare, das violette mit Einschluß des ultravioletten und das ultraviolette Gebiet des Sonnenspektrums für sich, jedesmal in besonderem von dem Empfindlichkeitsbereiche der Zelle abhängigen Maße photometrieren. Durch geeignete Lichtfilter (Fig. 1, unten), die unmittelbar vor der Zelle eingeschoben werden, lassen sich die Spektralbereiche einseitig gegen die kürzeren Wellenlängen hin mit einiger Genauigkeit begrenzen.

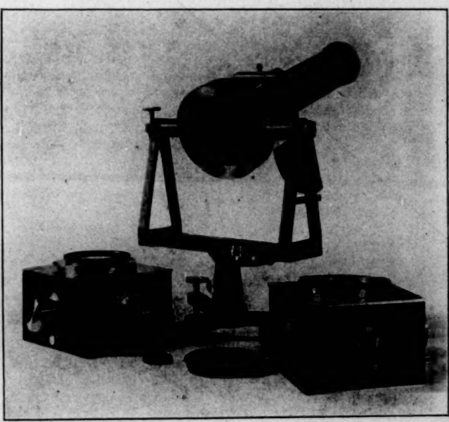


Fig. 2.

Wir haben solche Filter in vorzüglicher Beschaffenheit von der Firma Schott & Genossen in Jena bezogen, u. a. eines, als schweres Flintglas Nr. O. 8130 bezeichnet, das in 5 mm dicker Platte von Rot bis etwa 366 $\mu\mu$ durchlässig ist und gerade das auf Kadmium wirkende Licht des Sonnenspektrums wegnimmt, ein

anderes, gleich dickes, ebenfalls schweres Flintglas, Nr. O. 4818 absorbiert die unter 400 $\mu\mu$ liegenden Wellenlängen und daher das sichtbare Licht, das gerade noch auf Zink wirkt. Bei Vorschaltung des ersteren gibt die Kadmiumzelle keinen Photostrom im Sonnenlicht mehr an, ebenso die Zinkzelle bei Vorschaltung des zweiten. Um nötigenfalls, wenn der Photostrom den Meßbereich des Galvanometers überschreitet, die Intensität des Lichtes abzuschwächen, ohne seine Zusammensetzung zu ändern, benutzt man Filter von feinem Drahtnetz, deren Schwächungskoeffizient vorher bestimmt ist.

Wir danken der Firma Hartmann & Braun sowie Schott & Genossen für ihr Entgegenkommen und bemerken noch, daß uns die Mittel zur Anschaffung und zum Bau der beschriebenen Instrumente aus der Jagorstiftung in Berlin gewährt sind.

(Eingegangen 15. Oktober 1915.)

BESPRECHUNGEN.

Les idées modernes sur la constitution de la matière. Conférences faites en 1912 par E. Baur, A. Blanc, E. Bloch, Mme. Curie, A. Debierne, L. Dunoyer, P. Langevin, J. Perin, H. Poincaré, P. Weiß. 370 S. Paris, Gauthiers Villars. 1913.

Das Buch beginnt mit einer Abhandlung von J. Perrin über die Beweise für die Existenz der Moleküle. Es werden darin die auch schon früher von Perrin beschriebenen selbst ausgearbeiteten Methoden zur Bestimmung der Avogadroschen Konstanten durch die Dichteverteilung von Emulsionen und die Braunsche Bewegung derselben beschrieben, sowie die sonst bekannten Methoden, die zu einer Bestimmung dieser Konstanten sowie zur Bestimmung des el. Elementarquantums führen, besprochen.

Im zweiten Aufsatz behandelt P. Langevin die elektromagnetische Dynamik und die hauptsächlichen Zusammenhänge zwischen den elm. Feldern und den korpuskularen Trägern der Elektrizität.

Die Elementarquanten der Energie, wie sie sich auf Grund der Theorie der Strahlung und der spezifischen Wärme durch die Anschauungen von Planck, Einstein und Nernst entwickelt haben, werden von E. Baur im dritten Aufsatz behandelt. Nachdem in den folgenden Kapiteln von E. Bloch und A. Blanc die Elektronentheorie der Metalle und die Stoßionisation besprochen werden, schildert L. Dunoyer die Eigenschaften der hochverdünnten Gase. Es wird in diesem Aufsatz besonders auf die Anschauungen von Crookes, Soddy, Berry, Smoluchowski und W. Gaede eingegangen und eine Reihe von teilweise leicht ausführbaren und überaus anschaulichen Versuchen geschildert, um die Kinetik der Gase zu demonstrieren, so z. B. eine Verbesserung des Experimentes von Cantor, wo die Moleküle eines Gases oder Dampfes (Chlor oder Wasserdampf) auf einen leicht beweglichen Flügel fallen, dessen eine Seite mit einem für das Gas reaktionsfähigen Stoff belegt ist (Cu, P_2O_5), die andere jedoch aus einem Material besteht, was die Moleküle wieder reflektiert. Die Verschiedenheit des Stoßes erteilt dem Flügel einen Bewegungsantrieb. Es folgen andere interessante Versuche über spezielle Anordnungen für radiometrische und Wärmeleitungs-Messungen bei hochverdünnten Gasen. Zum Schluß wird die Gaedesche Molekularpumpe beschrieben.

Die folgenden Abschnitte von Frau Curie und A. Debierne behandeln die Strahlung der radioaktiven Körper und die Theorie der radioaktiven Umwandlungen. Ein Aufsatz von Pierre Weiß über das magnetische Moment der Atome und das Magneton zeigt, wie es dem Verfasser gelungen, in Anlehnung an die Anschauungen von Ampère und Weber mit Hilfe der kinetischen Theorie des Magnetismus von Langevin, die experimentell bestimmbaren Grundlagen immer klarer herauszuschälen um wirklich eine quantitative Messung der molekularen Momente vorzunehmen. Die Frucht dieser mühsamen Untersuchungen war die Entdeckung eines molekularen magnetischen Einheitsmomentes, des „Magnetons", dessen Anzahl allerdings in weiten Grenzen bei den verschiedenen chemischen Verbindungen schwankt. Das Buch schließt mit einem Aufsatz von Henri Poincaré über die Zusammenhänge von Materie und Äther.

Das Buch ist außerordentlich interessant und wertvoll, einmal weil es von Leuten geschrieben ist, welche selbst teilweise am Aufbau und an der Lösung der fraglichen Probleme durch Entdeckungen und theoretische Behandlung hervorragenden Anteil genommen und dann, weil es von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus den Stand der Forschung in einem Moment fixiert, wo die moderne Atomistik, ihren alten hypothetischen Charakter verlierend, auf festerer experimenteller Grundlage immer klarere Zusammenhänge zwischen Materie—Elektrizität—Magnetismus und Felderscheinungen aufzeigt und hoffnungsvolle neue Bahnen zu weiterer Forschung eröffnet.

H. Rausch von Traubenberg.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Danzig Dr. Richard Grammel für Mechanik.

Ernannt: Der a.o. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule Prag und Privatdozent an der Deutschen Universität daselbst Dr. Otto Hönigschmid zum ord. Professor für anorganische und analytische Chemie, sowie der a.o. Professor an der Universität Wien Dr. Franz Wenzel zum ord. Professor für allgemeine Experimentalchemie organischer Stoffe, beide an der Deutschen Technischen Hochschule Prag, der Observator am Geodätischen Institut bei Potsdam Professor Max Schnauder zum Abteilungsvorsteher daselbst.

Gestorben: Der Professor der Mathematik an der Bayr. Artillerie- und Ingenieurschule in München Dr. Peter Vogel.

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.